



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Svingningsteori, Bd. 1

lineær svingningsteori

Nielsen, Søren R. K.

Publication date:
1991

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):

Nielsen, S. R. K. (1991). *Svingningsteori, Bd. 1: lineær svingningsteori*. Institutet for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter. U / Bind 1 Nr. U9103

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

SVINGNINGSTEORI, BIND 1

Lineær svingningsteori

Søren R. K. Nielsen



Aalborg tekniske Universitetsforlag

FORORD

Nærværende lærebog er skrevet med henblik på undervisningen i lineær svingningsteori på konstruktionsliniens 8. semester på Aalborg Universitetscenter. Det pågældende kursus danner grundlaget for efterfølgende undervisning i ikke-lineær svingningsteori og stokastisk svingningsteori, hvilket har påvirket fremstillingens form. Det er således tilstræbt at præsentere alle gensvar i form af integraltransformationer af påvirkningen (Duhamels integral), hvilket repræsenterer en bekvem formulering i stokastisk svingningsteori. Manuskriptet er renskrevet af assistent Lene Sørensen, assistent Solveig Hesselvang og overassistent Kirsten Aakjær. Tegningerne er udført af teknisk assistent Norma Hornung. Alle takkes for veludført arbejde.

Aalborg Universitetscenter, juni 1991
Søren R. K. Nielsen

INDHOLDSFORTEGNELSE

	Side:
1. INDLEDNING	1
2. SVINGNINGER AF SYSTEMER AF 1 FRIHEDSGRAD	3
2.1 Udæmpede egensvingninger af 1 frihedsgradssystemer	3
2.2 Fjederssystemer	8
2.3 Grundligning for dæmpede, tvungne svingninger	10
2.4 Lineært viskos dæmpede egensvingninger af system af 1 frihedsgrad	12
2.5 Tvungne harmoniske svingninger af system af 1 frihedsgrad	17
2.6 Tvungne svingninger af systemer af 1 frihedsgrad som følge af arbitrær påvirkning	26
2.7 Bevægelig understøtning	32
2.8 D'Alemberts princip	36
2.9 Indirekte påvirkning	39
3. SVINGNINGER AF SYSTEMER AF n FRIHEDSGRADER	40
3.1 Grundligning for dæmpede, tvungne svingninger	40
3.2 Udæmpede egensvingninger af n frihedsgraders systemer	48
3.3 Tvungne harmoniske svingninger af n frihedsgraders systemer	57
3.4 Tvungne svingninger af systemer af n frihedsgrader som følge af arbitrær påvirkning	60
3.5 Ortogonalitetsegenskaber for udæmpede egensvingningsformer	64
3.6 Udvikling i udæmpede egensvingningsformer	67
3.7 Udvikling i dæmpede egensvingningsformer	75
3.8 Systemreduktion	84
3.9 Dæmpningsmodeller	87
3.10 Rayleighs brøk	90
3.11 Svingninger fremkaldt af bevægelser af understøtningerne	93
3.12 Indirekte påvirkning	95
4. SVINGNINGER AF PLANE BJÆLKEKONSTRUKTIONER	97
4.1 Bevægelsesligninger for bjælkeelement	97
4.2 Udæmpede bøjningsegensvingninger af bjælkeelementer	105
4.3 Egensvingningsformernes ortogonalitetsegenskaber	114
4.4 Udvikling i udæmpede egensvingningsformer	118
4.5 Udæmpede egensvingninger af plane rammekonstruktioner	124
5. APPENDICES	146
5.1 Appendix A: Fourierrækker og Fourierintegraler	146
5.2 Appendix B: Influenstal for statisk bestemte retliniede Bernoulli-Eulerbjælker med konstant tværsnit	149
6. EMNELISTE	151

1. INDLEDNING

Svingningsteori har til formål at bestemme *bevægelsen* eller *bevægelsesgensvaret* af et massesystem som følge af tidsvarierende ydre eller indre kræfter på systemet.

Bevægelsen fastlægges ved et sæt tidsvarierende koordinater $\mathbf{x}(t)^T = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ i et n -dimensionalt bevægelsesrum. T som øvre index betegner transponering. Vektorfunktionen $\mathbf{x}(t)$ fastlægger konstruktionens tilstand til ethvert tidspunkt. Ud fra denne kan man i princippet beregne flytninger, spændinger, tøjninger etc. overalt i konstruktionen. Koordinaterne $[x_1(t), \dots, x_n(t)]$ betegnes konstruktionens *frihedsgrader*. Jo flere frihedsgrader konstruktionen tildeles, jo mere nøjagtigt kan bevægelsen af denne beskrives.

Afhængig af frihedsgradsantallet, kategoriseres konstruktionen som et *1 frihedsgradssystem*, når $n = 1$, som et *multifrihedsgradssystem*, når $1 < n < \infty$, og som et *kontinuert system*, når $n = \infty$. 1 og multifrihedsgradssystemer betegnes samlet *diskrete systemer*.

Man skelner mellem *lineære systemer* og *ikke-lineære systemer*, for hvilke bevægelsesligningerne er henholdsvis lineære og ikke-lineære. I det følgende behandles udelukkende lineære systemer. For lineære systemer gælder *superpositionsprincippet*.

En bevægelse siges at være *harmonisk*, hvis den kan skrives

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \cos(\omega t - \Psi) \quad (1-1)$$

hvor $\mathbf{A} \in R^n$ er en tidsuafhængig amplitudevektor.

(1-1) indebærer, at alle komponenter $x_1(t), x_2(t), \dots$ bevæger sig med samme *cykliske frekvens* ω og samme *fase* Ψ . Forholdet mellem disse er tidsuafhængig. Således er

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{A_1}{A_2} = \text{konstant} \quad (1-2)$$

Specielt er samtlige komponenter lig 0 til samme tidspunkt.

I stedet for (1-1) vil vi undertiden benytte følgende komplekse notation

$$\mathbf{x}(t) = \text{Re}(\mathbf{B}e^{i\omega t}) = \text{Re}(\mathbf{B}) \cos \omega t - \text{Im}(\mathbf{B}) \sin \omega t, \quad \mathbf{B} \in C^n \quad (1-3)$$

$\text{Re}(\cdot)$ og $\text{Im}(\cdot)$ betegner realdelen og imaginærdelen af et komplekst tal. C er de komplekse tals legeme.

(1-3) er en mere generel definition på en harmonisk bevægelse, for hvilken (1-2) ikke nødvendigvis er opfyldt, ligesom komponenterne ikke nødvendigvis er lig 0 samtidig. Dette indebærer, at de enkelte komponenter $x_i(t)$ er forbundet med forskellig fase. På komponentform kan (1-3) skrives

$$x_i(t) = A_i \cos(\omega t - \Psi_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (1-4)$$

hvor

$$\left. \begin{aligned} A_i \cos \Psi_i &= \operatorname{Re}(B_i) \\ A_i \sin \Psi_i &= -\operatorname{Im}(B_i) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$A_i = ((\operatorname{Re}(B_i))^2 + (\operatorname{Im}(B_i))^2)^{\frac{1}{2}} = |B_i|, \quad i = 1, \dots, n \quad (1-5)$$

$$\tan \Psi_i = -\frac{\operatorname{Im}(B_i)}{\operatorname{Re}(B_i)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1-6)$$

Alle komponenter af bevægelsen (1-3) bevæger sig harmonisk med samme cykliske frekvens ω , men med forskellige faser Ψ_i . Den komplekse notation giver således mulighed for at beskrive en faseforskydning mellem komponenterne.

En bevægelse siges at være *periodisk*, hvis

$$\exists T \in R_+ \quad \forall t \in R_+ : \quad \mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t) \quad (1-7)$$

Det mindste tal T for hvilket (1-7) er opfyldt betegnes *perioden*. Perioden angiver det korteste tidsinterval indtil bevægelsen har gentaget sig.

Antallet af gentagelser pr. tidsenhed betegnes *svingningsfrekvensen*, defineret ved

$$f = \frac{1}{T} \quad [\text{s}^{-1} = \text{Hz}] \quad (1-8)$$

Den cykliske svingningsfrekvens kan skrives

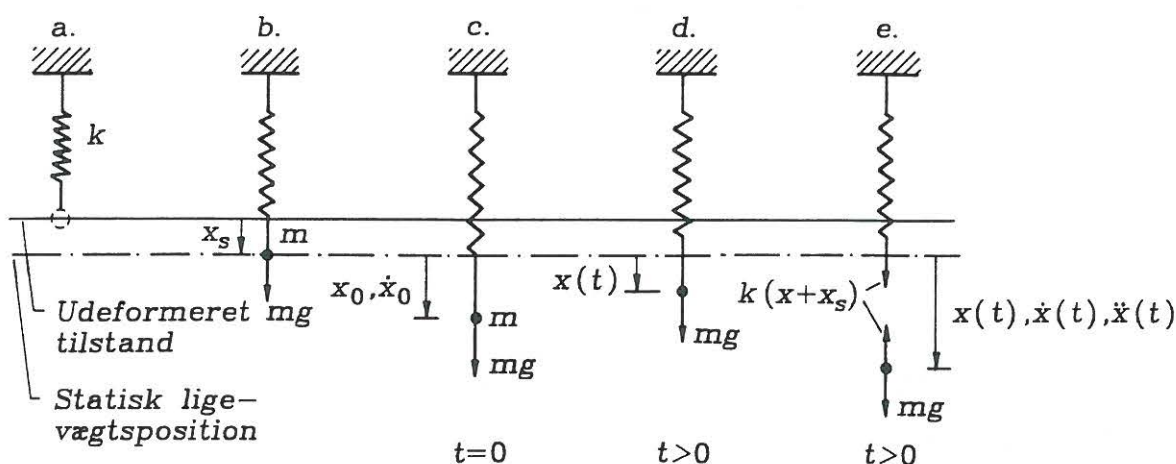
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad [\text{rad/s}] \quad (1-9)$$

Ved at erstatte t med $t+T$ i (1-1) eller (1-3) ses, at en harmonisk bevægelse er periodisk med perioden $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Periodiske bevægelser kan udvikles i en ligeligt konvergent Fourierrække af harmoniske delbevægelser, se appendiks A.

2. SVINGNINGER AF SYSTEMER AF 1 FRIHEDSGRAD

2.1 Udæmpede egensvingninger af 1 frihedsgradssystemer



Figur 2-1: Egensvingninger af lineært udæmpet system af 1 frihedsgrad. a) Udeforformeret tilstand. b) Statisk ligevægtstilstand. c) Begyndelsestilstand. d) Øjeblikkelig tilstand. e) Fritskåret masse.

Figur 2-1 viser et dæmpningsfrit system af 1 frihedsgrad med en punktformig masse m ophængt i enden af en masseløs, lineærelastisk fjeder med fjederstivheden k . Systemet kan kun bevæge sig i lodret retning, og har herved kun 1 frihedsgrad.

Før massen ophænges i fjederen, har denne en vis udeformeret længde (figur 2-1a). Tyngdekraften mg på massen forlænger fjederen med bidraget x_s , der fastlægger den statiske ligevægtstilstand (figur 2-1b). Frihedsgraden $x(t)$ regnes positiv nedad fra ligevægtstilstanden. Den statiske ligevægtstilstand er da karakteriseret ved $x = 0$.

Hastigheden $\dot{x}(t)$ og accelerationen $\ddot{x}(t)$ regnes positiv i samme retning som $x(t)$. Til tiden $t = 0$ bibringes systemet et sæt begyndelsesbetingelser (figur 2-1c).

$$[x(0), \dot{x}(0)] = [x_0, \dot{x}_0] \quad (2-1)$$

Systemet overlades herefter til sig selv, og udfører herved svingninger med tyngdekraften mg som eneste ydre belastning (figur 2-1d). Opgaven er nu at bestemme bevægelsen $x(t)$ for $t > 0$, således at begyndelsesbetingelserne (2-1) opfyldes.

Den generelle metode ved opstilling af bevægelsesligninger er

1. Massen skæres fri.
2. Alle ydre kræfter og indre kræfter (in casu: tyngdekraften mg og fjederkraften $k(x + x_s)$) påføres som ydre kræfter regnet positiv som x .
3. Newtons 2. lov anvendes på den fritskårne masse.

Newton's 2. lov giver, se figur 2-1e

$$m\ddot{x} = mg - k(x + x_s) \quad (2-2)$$

Højresiden af (2-2) angiver summen af alle kræfter på den fritskårne masse regnet positive efter frihedsgraden x .

Deformationen x_s i den statiske ligevægtstilstand er givet ved

$$mg = kx_s \quad (2-3)$$

Af (2-2) og (2-3) følger

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2-4)$$

Af (2-4) ses, at tyngdekraften udgår af bevægelsesligningen. Dette gælder for vilkårlige systemer, når følgende betingelser er opfyldt:

1. Bevægelser måles ud fra den statiske ligevægtstilstand.
2. Systemet er lineært.

Omvendt, når disse betingelser er opfyldt, kan bevægelsesligningerne formelt opstilles ved at ignorere tyngdekraften.

Eksempel 2-1:

Måles flytningen $x(t)$ i stedet ud fra den udeformerede tilstand på figur 2-1a, bliver bevægelsesligningen

$$m\ddot{x} + kx = mg \quad (2-5)$$

(2-4) skrives

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2-6)$$

hvor

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2-7)$$

Den fuldstændige løsning til (2-6), der opfylder begyndelsesbetingelserne (2-1), er givet ved

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad t \geq 0 \quad (2-8)$$

(2-8) kan skrives på formen

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \Psi) \quad (2-9)$$

hvor

$$\left. \begin{aligned} A \cos \Psi &= x_0 \\ A \sin \Psi &= \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$A = \left(x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-10)$$

$$\tan \Psi = \frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_0} \quad (2-11)$$

Ved sammenligning af (2-9) og (1-1) ses, at (2-8) og (2-9) beskriver en harmonisk bevægelse med den cykliske egenfrekvens ω_0 givet ved (2-7), og amplituden A givet ved (2-10).

Egensvingningsperioden bliver

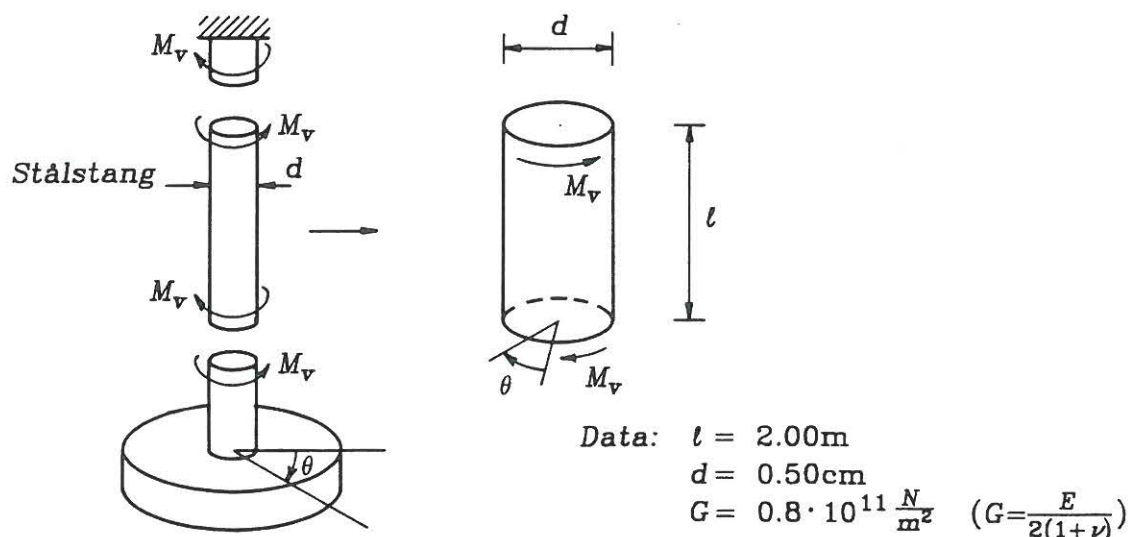
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2-12)$$

Egensvingningsfrekvensen bliver

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2-13)$$

For de fleste bygningskonstruktioner gælder for laveste egenfrekvens $f_0 \simeq 0.2 \text{ Hz} - 2.0 \text{ Hz}$, hvor nedre grænse i det anførte interval gælder for relativt høje og slanke konstruktioner.

Eksempel 2-2: Torsionsegensvingninger af svinghjul



Figur 2-2: Torsionssvingninger af svinghjul.

Et svinghjul er ophængt i en fastindspændt cirkulær cylindrisk stålstang med diameter d og længden l . Stålstangen antages masseløs og lineær elastisk med forskydningsmodul G . Det er observeret, at svinghjulet udfører 10 svingninger i løbet af 30.2s. Opgaven er at bestemme hjulets masseinertimoment J .

For det fritskårne svinghjul gælder impulsmomentsætningen

$$J\ddot{\theta} = -M_v (= \Sigma \text{ alle ydre momenter i retning af } \theta) \quad (2-14)$$

For den fritskårne stålstang gælder fri vridning (St. Venant torsion)

$$M_v = \frac{GI_v}{l} \theta \quad (2-15)$$

hvor $I_v = \frac{\pi}{32} d^4$ er den cirkulære stålstangs vridningsinertimoment.

Af (2-14) og (2-15) følger

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (2-16)$$

hvor

$$\omega_0^2 = \frac{GI_v}{Jl} = \frac{\pi}{32} \frac{Gd^4}{Jl} \quad (2-17)$$

Da

$$T_0 = \frac{30.2}{10} = 3.02\text{s} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{3.02} = 2.081\text{s}^{-1}$$

findes af (2-17)

$$J = \frac{\pi}{32} \frac{0.8 \cdot 10^{11} \cdot (0.005)^4}{2.081^2 \cdot 2.00} = 0.567 \text{ kg m}^2$$

Af (2-4) følger ved multiplikation med \dot{x}

$$(m\ddot{x} + kx)\dot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{T} + \dot{U} = 0 \quad (2-18)$$

hvor

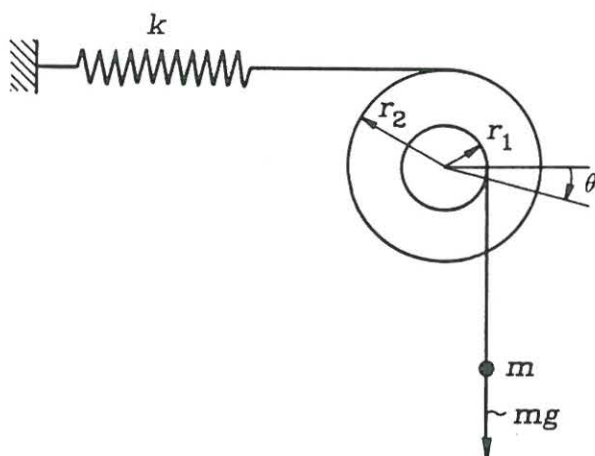
$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (2-19)$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \quad (2-20)$$

T er den kinetiske energi og U er den potentielle energi. (2-18) viser, at den mekaniske energi af systemet er konstant. Dette er en følge af, at systemet er dæmpningsfrit.

(2-18) kan i visse tilfælde med fordel anvendes til opstillingen af bevægelsesligningen for udæmpede systemer af 1 frihedsgrad.

Eksempel 2-3: Rotationsegensvingninger af trisse



Figur 2-3: Rotationssvingninger.

Figur 2-3 viser et rotationssymmetrisk legeme bestående af en cirkulær cylinder med radius r_1 , der forlænges i en anden cylinder med radius r_2 . Til cylinderen med radius r_1 er fæstnet en ustrækkelig snor med en punktformig masse m i den anden ende. Til cylinderen med radius r_2 er ligeledes fæstnet en ustrækkelig snor, der fæstner sig til en lineær elastisk fjeder med fjederstivheden k i den anden ende. Legemet kan kun udføre rotationssvingninger om symmetriaksen. Legemets masseinertimoment om denne akse er J . Opgaven er at opstille bevægelsesligningen for systemet, og bestemme den cykliske egenfrekvens.

Opgaven løses ved (2-18). Idet θ angiver rotationen af systemet fra den statiske ligevægtstilstand, findes

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(r_1\dot{\theta})^2 \quad (2-21)$$

$$U = \frac{1}{2}k(r_2\theta)^2 \quad (2-22)$$

Heraf

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(r_1\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}k(r_2\theta)^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$((J + mr_1^2)\ddot{\theta} + kr_2^2\theta)\dot{\theta} = 0 \Rightarrow$$

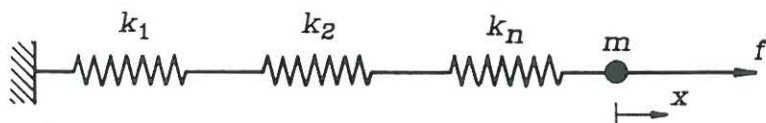
$$(J + mr_1^2)\ddot{\theta} + kr_2^2\theta = 0 \quad (2-23)$$

Heraf følger

$$\omega_0^2 = \frac{kr_2^2}{J + mr_1^2} \quad (2-24)$$

2.2 Fjedersystemer

Undertiden er systemets fjedervirkning opnået ved kombination af enkeltfjedre. Det har derfor betydning at kunne beregne fjederkonstanten k for *erstatningsfjederen*, der ækvivalerer det samlede systems virkning.



Figur 2-4: Seriesystem.

Figur 2-4 viser et *seriesystem* af fjedre med fjederkonstanterne k_1, \dots, k_n . Massen m påvirkes af kraften f og får herved flytningen x . Samtidig får fjedrene forlængelserne x_1, \dots, x_n .

Kraften er f i alle fjedre, i.e.

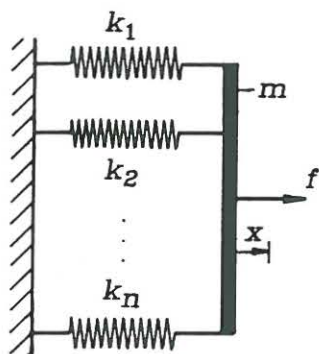
$$f = k_1 x_1 = \dots = k_n x_n \quad (2-25)$$

Den samlede forlængelse x er lig summen af delforlængelserne af fjedrene. Ved (2-25) findes

$$x = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \frac{f}{k_i} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \right) f \quad (2-26)$$

Heraf følger, at seriesystemet er ækvivalent med en erstatningsfjeder med fjederkonstanten bestemt af

$$\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \quad (2-27)$$



Figur 2-5: Parallelsystem.

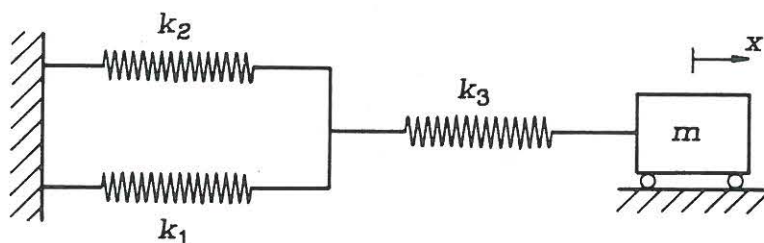
Figur 2-5 viser et *parallelsystem* af fjedre med fjederkonstanterne k_1, \dots, k_n . Alle fjedre får samme forlængelse x som massen m . Kraften i fjeder i bliver $f_i = k_i x$. Summen af disse må ækvivalere den ydre kraft f . Herved

$$f = \sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^n k_i x = \left(\sum_{i=1}^n k_i \right) x \Rightarrow$$

$$k = \sum_{i=1}^n k_i \quad (2-28)$$

Erstatningsfjederen for et vilkårligt fjedersystem bestemmes ved, at man trinvist erstatter alle delsystemerne af fjedre i serie- eller parallelforbindelse med hver sin erstatningsfjeder, indtil et ækvivalent globalt serie- eller parallelsystem af erstatningsfjedre er opnået. Det samlede systems erstatningsfjeder findes dernæst af (2-27) eller (2-28).

Eksempel 2-4:



Figur 2-6: Fjedersystem.

Figur 2-6 viser et fjedersystem, hvor parallellforbundne fjedre med stivhederne k_1 og k_2 er i serie med en fjeder med stivheden k_3 .

Erstatningsfjederstivheden k_0 for parallelsystemet bliver ved (2-28)

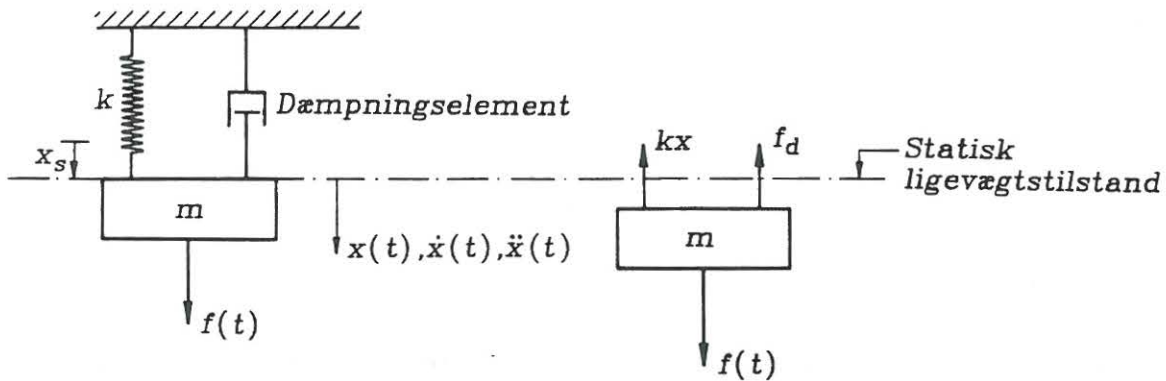
$$k_0 = k_1 + k_2 \quad (2-29)$$

Stivheden k af erstatningsfjederen for det samlede system bliver herved

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_3} \Rightarrow$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_1 + k_2} + \frac{1}{k_3}} \quad (2-30)$$

2.3 Grundligning for dæmpede, tvungne svingninger



Figur 2-7: Tvungne dæmpede svingninger af 1 frihedsgradssystem.

Dæmpning, dvs. omdannelse af mekanisk energi til varme, er altid til stede som følge af dissipation i materialet, friktion i samlinger, plastiske deformationer mm. For at gøre modellen mere realistisk tilføjes derfor et dæmpningselement til systemet, der forbindes til massen m parallelt med en lineært elastisk fjeder med fjederstivheden k , se figur 2-7. Al energidissipation i systemet sker i dæmpningselementet.

De ydre kræfter på massen m udgøres af tyngdekraften mg og den tidsvarierende kraft $f(t)$. $f(t)$ regnes positiv i samme retning som frihedsgraden x , der vælges som udbøjningen fra den statiske ligevægtstilstand, se figur 2-7. Som nævnt i afsnit 2.1 kan vi herved formelt se bort fra tyngdekraften ved opstillingen af systemets bevægelsesligning.

Massen skæres fri, og samtlige indre og ydre kræfter påføres som ydre belastning på denne. Dæmpningselementet giver anledning til *dæmpningskraften* f_d på den fritskårne masse, der regnes positiv i samme retning som fjederkraften kx , se figur 2-7.

Bevægelsesligningen følger nu ved anvendelse af Newtons 2. lov på den fritskårne masse

$$m\ddot{x} = f(t) - kx - f_d \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} + kx = f(t) - f_d \quad (2-31)$$

Ved multiplikation af (2-31) med \dot{x} findes ved (2-19), (2-20)

$$(m\ddot{x} + kx)\dot{x} = f(t)\dot{x} - f_d\dot{x} \Rightarrow$$

$$d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = f(t)\dot{x}dt - f_d\dot{x}dt \Rightarrow$$

$$d(T + U) = f(t)\dot{x}dt - f_d\dot{x}dt \quad (2-32)$$

hvor den kinetiske energi T er givet ved (2-19), og den potentielle energi U er givet ved (2-20).

Antag midlertidigt, at $f(t) \equiv 0$. (2-32) kan da skrives

$$f_d \dot{x} = -\frac{d}{dt}(T + U) \quad (2-33)$$

Højresiden af (2-33) angiver tabet i mekanisk energi pr. tidsenhed. Følgelig er $f_d \dot{x}$ lig energien, der pr. tidsenhed dissiperes bort som varme.

$f_d(t)$ kaldes *dissipativ*, hvis det for enhver hastighed \dot{x} af systemet gælder

$$f_d \dot{x} > 0 \quad (2-34)$$

Når (2-34) er opfyldt, sker der i henhold til (2-33) et stadigt tab af mekanisk energi. (2-18) fremkommer af (2-33) for $f_d(t) \equiv 0$.

For at løse (2-31) kræves en konstitutiv ligning $f_d = f_d(x, \dot{x})$, der specificerer dæmpningskraftens afhængighed af x og \dot{x} . Eksempler på dissipative dæmpningsmodeller er

$$f_d = c\dot{x}, \quad c > 0 \quad (2-35)$$

$$f_d = c\dot{x}|\dot{x}|, \quad c > 0 \quad (2-36)$$

$$f_d = c \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}, \quad c > 0 \quad (2-37)$$

Dæmpningsmodellerne (2-36) og (2-37) er *ikke-lineære*. En fordobling af hastigheden \dot{x} medfører ikke en fordobling af dæmpningskraften. (2-36) forekommer ved svingninger af massen i en stillestående væske. (2-37) betegnes *Coulombs dæmpningsmodel*. Denne beskriver friktionskraften ved vandrette bevægelser af massen på et tørt underlag.

Modellen (2-35) er lineær. (2-35) betegnes *den lineært viskose dæmpningsmodel*. I modsætning til de ikke-lineære modeller fører denne til analytisk tilgængelige bevægelsesligninger. Vi skal i det følgende udelukkende forudsætte lineær viskos dæmpning. Konstanten c i (2-35) betegnes *dæmpningskonstanten*.

Ved indsætning af (2-35) i (2-31) findes bevægelsesligningen

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t), \quad t > 0 \quad (2-38)$$

der skal løses med hensyn til begyndelsesbetingelserne

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (2-39)$$

Antag $x(t)$ er periodisk med perioden T . Ved integration af (2-32) over en periode findes

$$\int_0^T f(t)\dot{x}(t)dt - \int_0^T f_d(t)\dot{x}(t)dt = \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t) \right]_0^T \quad (2-40)$$

Da $x(0) = x(T)$ og $\dot{x}(0) = \dot{x}(T)$ er højresiden af (2-40) lig 0. Følgelig gælder

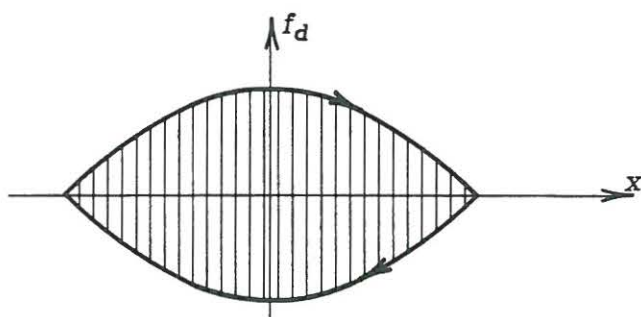
$$E_y = E_d \quad (2-41)$$

hvor

$$E_y = \int_0^T f(t)\dot{x}(t)dt \quad (2-42)$$

$$E_d = \int_0^T f_d(t)\dot{x}(t)dt \quad (2-43)$$

E_y angiver arbejdet, som den ydre kraft udfører på systemet i løbet af 1 periode. E_d er energien, som systemet dissiperer i løbet af en periode. For periodiske bevægelser er det nødvendigt, men *ikke* tilstrækkeligt, at (2-41) er opfyldt.



Figur 2-8: Hysteresesløjfe for dæmpningskraft i periodisk bevægelse.

Optegnes grafen for sammenhængende værdier af $f_d(t)$ og $x(t)$ med tiden t som parameter, fås i tilfælde af en periodisk bevægelse en lukket kurve, en såkaldt *hysteresesløjfe*, se figur 2-8. E_d er åbenbart lig størrelsen af det skraverede areal på figuren.

2.4 Lineært viskos dæmpede egensvingninger af system af 1 frihedsgrad

Bevægelsesligningen følger af (2-38) for $f(t) \equiv 0$. Efter division med m fremkommer ligningen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x &= 0, \quad t > 0 \\ x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (2-44)$$

ω_0 er den cykliske egenfrekvens ved udæmpede egensvingninger, givet ved (2-7).

Parameteren ζ defineres åbenbart ved

$$2\zeta\omega_0 = \frac{c}{m} \Rightarrow$$

$$\zeta = \frac{c}{2\omega_0 m} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (2-45)$$

Karakteren af løsningen til (2-44) afhænger af størrelsen af ζ . Det er umiddelbart klart, at $\zeta \in [0, \infty[$. Der fremkommer følgende løsninger for de kvalitatitv forskellige områder af ζ

1. $\zeta = 0$: *Dæmpningsfrit system*

Bevægelsen er givet ved (2-8)

2. $\zeta \in]0, 1[$: *Underkritisk dæmpet system*

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left[x_0 \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t) \right], \quad t \geq 0$$

(2-46)

3. $\zeta = 1$: *Kritisk dæmpet system*

$$x(t) = e^{-\omega_0 t} [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_0 x_0)t], \quad t \geq 0$$

(2-47)

4. $\zeta \in]1, \infty[$: *Overkritisk dæmpet system*

$$x(t) = Ae^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_0 t} + Be^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_0 t} \quad (2-48)$$

hvor

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\dot{x}_0 + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_0 x_0}{2\omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ B &= \frac{-\dot{x}_0 - (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_0 x_0}{2\omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{aligned} \right\} \quad (2-49)$$

Udtrykkene (2-46), (2-47), (2-48) eftervises ved indsætning i (2-44).

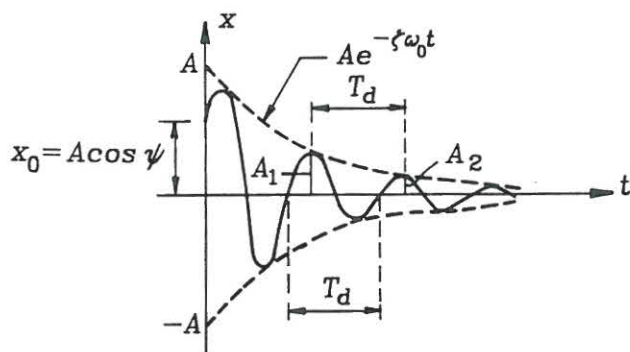
Den kritiske værdi af dæmpningskonstanten c_k er den værd af c , der indsat i (2-45) giver $\zeta = 1$. Heraf

$$c_k = 2\sqrt{km} \quad (2-50)$$

Af (2-45) og (2-50) følger heraf

$$\zeta = \frac{c}{c_k} \quad (2-51)$$

ζ er således forholdet mellem den aktuelle værdi af dæmpningskonstanten og den kritiske værdi af dæmpningskonstanten. Af denne grund anvendes betegnelsen *dæmpningsforholdet* for ζ .



Figur 2-9: Bevægelse af underkritisk dæmpet system.

Bevægelsen af et underkritisk dæmpet system kan skrives, se (2-46)

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t - \Psi) \quad (2-52)$$

hvor

$$\left. \begin{aligned} A \cos \Psi &= x_0 \\ A \sin \Psi &= \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$A = \left(x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-53)$$

$$\tan \Psi = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_0 x_0}{x_0 \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2-54)$$

Bevægelsen (2-52) er ikke-periodisk pga. faktoren $e^{-\zeta\omega_0 t}$, der bevirker, at svingningsamplituden aftager med tiden. Den *dæmpede egensvingningsperiode* T_d defineres som perioden af den harmoniske faktor i (2-52), hvorved

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2-55)$$

T_d er åbenbart tidsintervallet mellem 2 på hinanden følgende krydsninger af $x(t)$ af tidsaksen i opadgående retning.

Den *dæmpede cykliske egenfrekvens* defineres ved

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2-56)$$

Til et givet tidspunkt t er bevægelsen givet ved (2-52). En dæmpet svingningsperiode senere er bevægelsen givet ved

$$\begin{aligned} x(t + T_d) &= A e^{-\zeta\omega_0(t+T_d)} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_0(t + T_d) - \Psi) = e^{-\zeta\omega_0 T_d} x(t) \Rightarrow \\ \frac{x(t + T_d)}{x(t)} &= e^{-\zeta\omega_0 T_d} = \exp\left(-2\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \end{aligned} \quad (2-57)$$

I det sidste udsagn af (2-57) er (2-56) benyttet. Af (2-57) følger, at hvis bevægelsen til et givet tidspunkt t er $x(t)$, er bevægelsen til tiden $t + T_d$ mindsket med faktoren $\exp(-2\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}})$, uafhængig af tidspunktet t .

Det *logaritmiske dekrement* δ defineres ved

$$\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t + T_d)}\right) = 2\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2-58)$$

hvor (2-57) er benyttet. Af (2-58) følger, at ζ og δ er ensbetydende mål for dæmpningen i et underkritisk dæmpet system.

Ved et egensvingningsforsøg måler man bevægelsen af konstruktionen som vist på figur 2-9. På grafen bestemmes tidsintervallet T_d mellem 2 på hinanden følgende krydsninger af tidsaksen i opadgående retning. Dernæst måles udsvingene A_1 og A_2 med indbyrdes tidsinterval T_d . Herved

$$\delta = \ln \frac{A_1}{A_2} \quad (2-59)$$

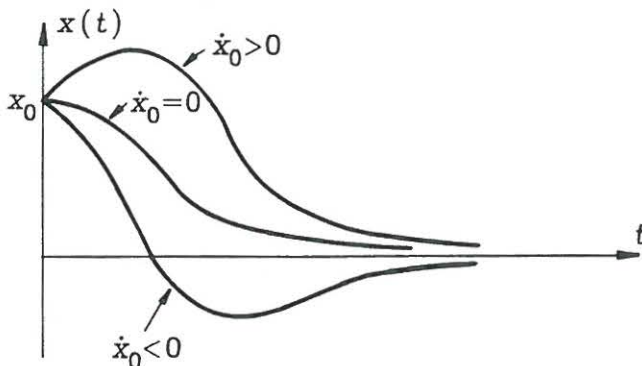
Dæmpningsforholdet beregnes dernæst af (2-58)

$$\zeta = \frac{\frac{\delta}{2\pi}}{\sqrt{1 + (\frac{\delta}{2\pi})^2}} \quad (2-60)$$

Den udæmpede cykliske egenfrekvens ω_0 bestemmes endelig af (2-56)

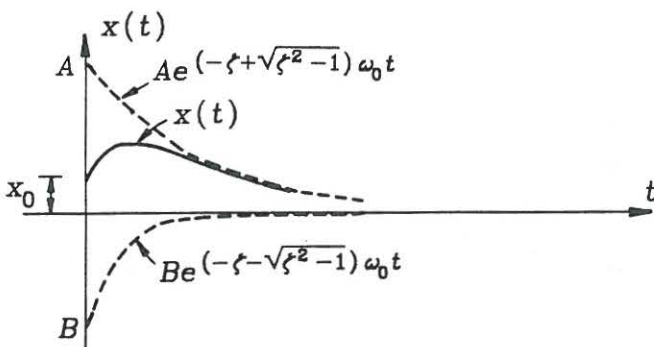
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_d \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2-61)$$

Ved et egensvingningsforsøg er herved demonstreret, hvorledes parametrene i differentialligningen (2-44) kan identificeres.



Figur 2-10: Bevægelser af kritisk dæmpet system.

Figur 2-10 viser det kvalitative forløb af graferne for bevægelser af et kritisk dæmpet system med begyndelsesflytningen $x_0 > 0$, og hvor $\dot{x}_0 > 0$, $\dot{x}_0 = 0$ og $\dot{x}_0 < 0$. Ved analyse af (2-47) ser man, at bevægelserne for $\dot{x}_0 < 0$ krydser tidsaksen en enkelt gang. For $\dot{x}_0 = 0$ haves et monotont aftagende forløb af $x(t)$ mod grænseværdien 0. For $\dot{x}_0 > 0$ antager $x(t)$ en maksimumsværdi større end x_0 , og aftager herefter monotont mod 0. Der forekommer således ingen krydsning af tidsaksen for $x_0 > 0 \wedge \dot{x}_0 \geq 0$.

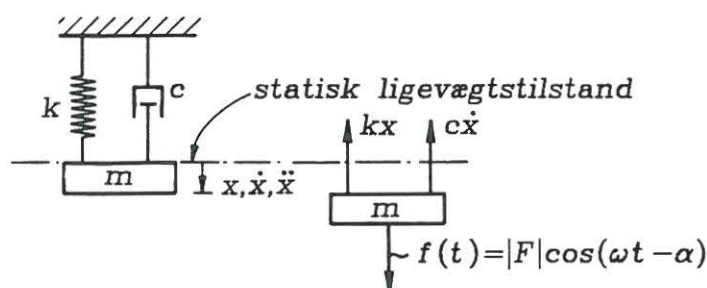


Figur 2-11: Bevægelse af overkritisk dæmpet system.

Figur 2-11 viser bevægelsen af et overkritisk dæmpet system med begyndelsesbetingelserne $x_0 > 0 \wedge \dot{x}_0 > 0$. I dette tilfælde følger af (2-49), at $A > 0$ og $B < 0$. Delbevægelserne i (2-48) er vist stiplede i figur 2-11. $x(t)$ fremkommer ved addition af disse. Da $(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_0 > (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_0$ klinger den sidste komponent i (2-48) hurtigere bort end den første komponent. Følgelig haves det asymptotiske forløb $x(t) \propto Ae^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_0 t}$, som også fremgår af figur 2-11.

Langt de fleste bygningskonstruktioner er underkritisk dæmpede. Typisk er ζ af størrelsesorden 0.005 - 0.015. Konstruktioner med $\zeta \leq 0.02$ betegnes *svagt dæmpede*.

2.5 Tvungne harmoniske svingninger af system af 1 frihedsgrad



Figur 2-12: Tvungne harmoniske svingninger af lineært viskos dæmpet 1 frihedsgradssystem.

Den dynamiske del af den ydre kraft $f(t)$ antages harmonisk varierende i tiden, dvs.

$$f(t) = \text{Re}(F e^{i\omega t}) \quad (2-62)$$

F er en kompleks amplitude givet ved

$$F = |F| e^{-i\alpha} \quad (2-63)$$

(2-62) kan herved skrives

$$f(t) = |F| \cos(\omega t - \alpha) \quad (2-64)$$

$|F|$ er således amplituden og α fasen af den harmoniske belastning.

Efter division med m antager (2-38), (2-39) herved formen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x &= \text{Re}\left(\frac{F}{m} e^{i\omega t}\right), \quad t > 0 \\ x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (2-65)$$

Det er en erfaringsmæssig kendsgerning, at når et system som det på figur 2-12 viste påvirkes af en harmonisk varierende ydre kraft, bliver bevægelsen efter nogen tid harmonisk med samme frekvens som påvirkningen, når bevægelsen fra begyndelsesbetingelserne er klinget bort. Der søges derfor en partikulær løsning til den inhomogene differentiaalligning (2-65) på formen

$$x(t) = \text{Re}(X e^{i\omega t}) \quad (2-66)$$

hvor X er en kompleks amplitude. Ved indsætning af (2-66) i (2-65) findes

$$\operatorname{Re}(-\omega^2 X e^{i\omega t}) + \operatorname{Re}(2\zeta\omega_0 i\omega X e^{i\omega t}) + \operatorname{Re}(\omega_0^2 X e^{i\omega t}) = \operatorname{Re}\left(\frac{F}{m} e^{i\omega t}\right) \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_0\omega i\right)X - \frac{F}{m}\right]e^{i\omega t} = 0 \quad (2-67)$$

For at (2-66) er en mulig bevægelse, må (2-67) være opfyldt til alle tidspunkter. Dette er kun muligt, hvis leddet i den skarpkantede parentes er lig 0. Dvs. hvis

$$X = H(\omega)F \quad (2-68)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_0\omega i)} \quad (2-69)$$

$H(\omega)$ betegnes *frekvensresponsfunktionen*. Denne afhænger åbenbart af systemparametrene m , c , k , hvorimod belastningen kun indgår ved dennes cykliske frekvens ω . Det fremgår af (2-68), at $H(\omega)$ angiver amplituden X af bevægelsesgensvaret, når $F = 1$.

X skrives på polær kompleks form

$$X = |X|e^{-i\Psi} = Ae^{-i\Psi} \quad (2-70)$$

Ved indsætning i (2-66) findes

$$x(t) = A \cos(\omega t - \Psi) \quad (2-71)$$

(2-71) angiver en harmonisk bevægelse med amplitude $A = |X|$ og fase Ψ . Disse størrelser bestemmes i det følgende.

Frekvensresponsfunktionen (2-69) skrives ligeledes på kompleks polær form

$$H(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\zeta\omega_0\omega i}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2)} = |H(\omega)|e^{-i\Psi_0} \quad (2-72)$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2}} \quad (2-73)$$

$$|H(\omega)| \cos \Psi_0 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2)} \quad (2-74)$$

$$|H(\omega)| \sin \Psi_0 = \frac{2\zeta\omega_0\omega}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2)} \quad (2-75)$$

Af (2-74), (2-75) findes

$$\tan \Psi_0 = \frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2-76)$$

Af (2-63), (2-68), (2-70), (2-72), (2-73) følger

$$Ae^{-i\Psi} = |H(\omega)|e^{-i\Psi_0}|F|e^{-i\alpha} \Rightarrow$$

$$A = |H(\omega)||F| = \frac{|F|}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2}} \quad (2-77)$$

$$\Psi = \Psi_0 + \alpha \quad (2-78)$$

Ψ_0 kan herved fortolkes som fasen, hvormed bevægelsen er bagefter påvirkningen.

Ved indføring af *frekvensforholdet*

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (2-79)$$

og anvendelse af (2-7), kan (2-76), (2-77) skrives på formen

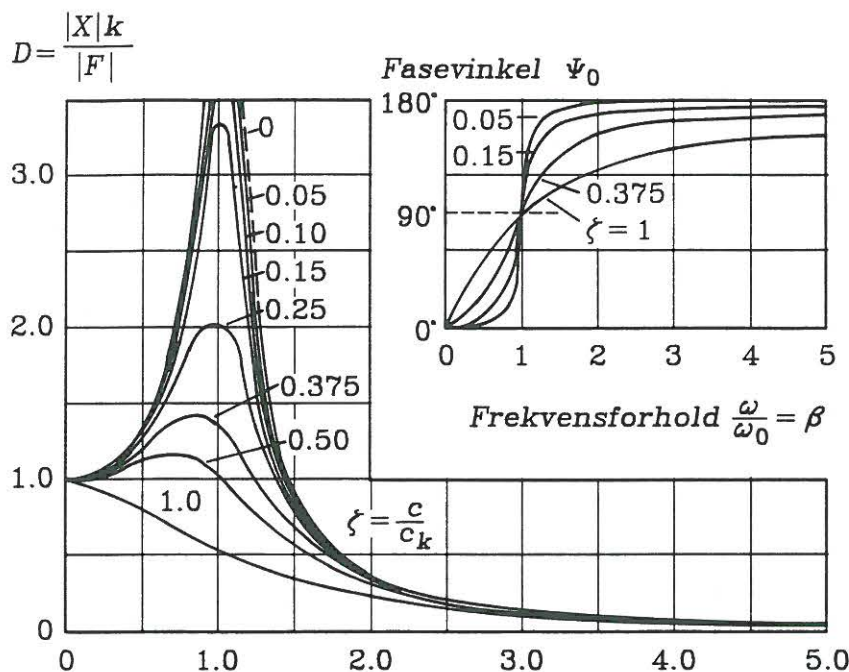
$$A = |X| = D(\zeta, \beta) \frac{|F|}{k} \quad (2-80)$$

$$\tan \Psi_0 = \frac{2\zeta\beta}{1 - \beta^2} \quad (2-81)$$

hvor

$$D(\zeta, \beta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}} \quad (2-82)$$

$|F|/k$ angiver amplituden af udbøjningen for en uendelig langsomt harmonisk varierende ydre belastning med amplituden $|F|$. I dette tilfælde er inertileddet $m\ddot{x}$ og dæmpningsleddet $c\dot{x}$ i (2-38) ignorable. Faktoren $D(\zeta, \beta)$, der betegnes *den dynamiske forstærkningsfaktor*, angiver den forholdsmæssige forøgelse af amplituden $|X|$, når disse kræfter har ikke-ignorable indflydelse på gensvaret.



Figur 2-13: Grafer for dynamisk forstærkningsfaktor D og faseforskydning Ψ_0 som funktion af frekvensforholdet β og dæmpningsforholdet ζ .

Grafen for A som funktion af ω betegnes *det harmoniske amplitudegensvar*.

Variationen af $D(\zeta, \beta)$ og $\Psi_0(\zeta, \beta)$ er vist på figur 2-13 som funktion af β for forskellige værdier af dæmpningsforholdet ζ .

For $\beta = \frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ er inertileddet og dæmpningsleddet ignorable, hvorfor $D \approx 1$. Bevægelsen er *kvasistatisk*, bestemt ved $x(t) = \frac{1}{k}f(t)$. Dette indebærer, at faseforskydningen mellem påvirkning og gensvar er lig 0.

For $\beta = \frac{\omega}{\omega_0} = 1$ er $\Psi_0 = 90^\circ$ uafhængigt af størrelsen af ζ . I dette tilfælde er $D = \frac{1}{2\zeta}$. Som det fremgår af figur 2-13 antages maksimalværdien af D for et frekvensforhold $\beta = \beta_0 < 1$.

For $\beta = \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ nærmer Ψ_0 sig 180° . For den dynamiske forstærkning gælder $D < 1$.

Den fuldstændige løsning til (2-65) udgøres af en linearkombination af (2-66) og løsningen til den homogene differentiaalligning. Ved (2-52) findes

$$x(t) = A \cos(\omega t - \Psi) + A_1 e^{-\zeta \omega_0 t} \cos(\omega_d t - \Psi_1) \quad (2-83)$$

A og Ψ er givet ved (2-77) og (2-78). A_1 og Ψ_1 er integrationsparametre, der fastlægges af begyndelsesbetingelserne (2-39). Herved

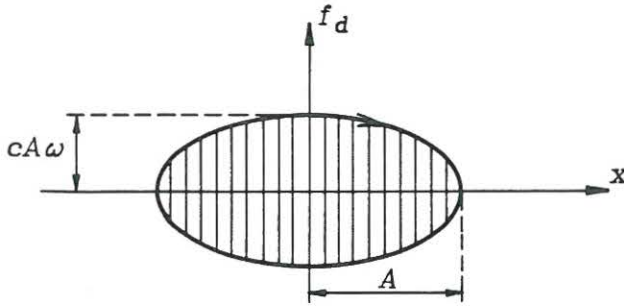
$$\left. \begin{aligned} x_0 &= A \cos \Psi + A_1 \cos \Psi_1 \\ \dot{x}_0 &= A \omega \sin \Psi + A_1 \omega_d \left(\sin \Psi_1 - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos \Psi_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-84)$$

Sidsteleddet på højresiden af (2-83) dæmpes efterhånden bort, svarende til at bevægelsen bliver stadig mere domineret af det første led. Førsteleddet betegnes *den stationære bevægelse*, mens sidsteleddet betegnes *den transiente bevægelse*.

Af (2-71) følger

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t - \Psi) \quad (2-85)$$

$$f_d(t) = c\dot{x} = -A\omega c \sin(\omega t - \Psi) \quad (2-86)$$



Figur 2-14: Hysteresesløjfe ved harmonisk bevægelse af lineært viskøst dæmpet system.

Af (2-71) og (2-86) følger

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{f_d}{c\omega A}\right)^2 = 1 \quad (2-87)$$

(2-87) viser, at hysteresesløjfen ved en harmonisk bevægelse af et lineært viskøst dæmpet system af 1 frihedsgrad er en ellipse med centrum i $(x, f_d) = (0, 0)$. Halvakserne er A og $c\omega A$, og er parallelle med x - og f_d -akserne, se figur 2-14.

Den dissiperede energi pr. periode bliver lig ellipsens areal, i.e.

$$E_d = \pi c \cdot A^2 \omega \quad (2-88)$$

Den ydre tilførte energi pr. periode bliver ved (2-42), (2-64), (2-78) og (2-85)

$$\begin{aligned} E_y &= \int_0^T |F| \cos(\omega t - \alpha) (-A\omega \sin(\omega t - \Psi_0 - \alpha)) dt \\ &= A\omega |F| \int_0^T \cos(\omega t - \alpha) (-\sin(\omega t - \alpha) \cos \Psi_0 + \cos(\omega t - \alpha) \sin \Psi_0) dt \\ &= \pi A |F| \sin \Psi_0 \end{aligned} \quad (2-89)$$

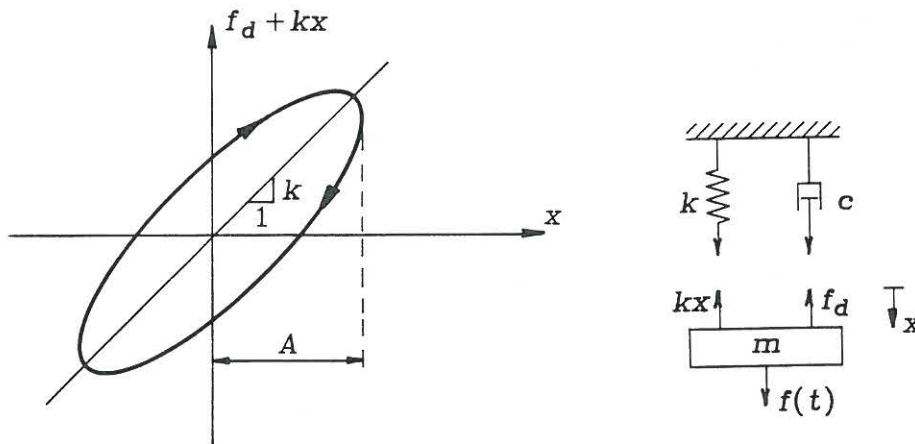
Af (2-45), (2-75), (2-77) følger

$$\sin \Psi_0 = |H(\omega)| 2\zeta \omega_0 \omega m = |H(\omega)| c\omega \quad (2-90)$$

Ved (2-77), (2-88) haves herved

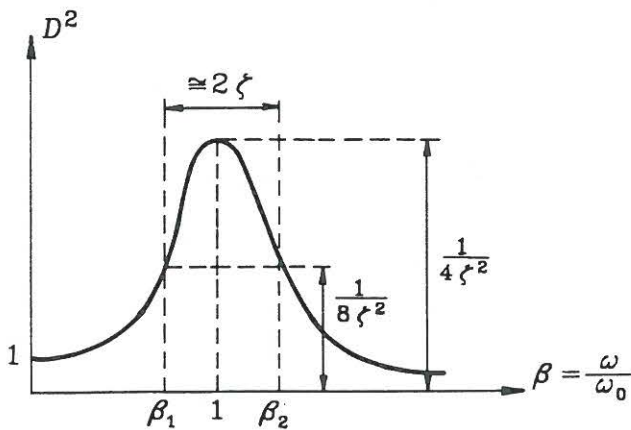
$$E_y = \pi A |F| |H(\omega)| c\omega = \pi A^2 c\omega = E_d \quad (2-91)$$

(2-91) angiver en formel eftervisning af (2-41) for harmoniske bevægelser af et lineært viskos dæmpet system.



Figur 2-15: Hysteresesløjfe for samlet indre kraft ved harmonisk bevægelse.

Den samlede indre kraft bliver $F(t) = f_d + kx$. Hysteresesløjfen for denne bliver ligeledes en ellipse, der fremkommer ved rotation af hysteresesløjfen for f_d , se figur 2-15. Da $\int_0^T kx \dot{x} dt = 0$, er arealet af hysteresesløjferne på figur 2-14 og figur 2-15 lige store.



Figur 2-16: Bestemmelse af halvbåndsbredde.

Af (2-69), (2-82) følger

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{k^2} D^2(\zeta, \beta) \quad (2-92)$$

Det kvalitative forløb af $D^2(\zeta, \beta)$ er afbildet som funktion af frekvensforholdet β på figur 2-16. For $\beta = 1$ haves iht. (2-82) $D^2 = \frac{1}{4\zeta^2}$. Der søges nu 2 cykliske frekvenser $\omega_1, \omega_2 : \omega_1 < \omega_0 < \omega_2 \Rightarrow \beta_1 < 1 < \beta_2$, hvor $D^2 = \frac{1}{8\zeta^2}$. ω_1, ω_2 betegnes *halvbåndspunkterne*. I disse punkter er funktionsværdien af D^2 eksakt det halve af værdien i resonanspunktet. Ved *halvbåndsbredden* forstås

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad (2-93)$$

β_1 og β_2 bestemmes af

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\zeta^2} &= \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2} \Rightarrow \\ \left. \begin{matrix} \beta_2^2 \\ \beta_1^2 \end{matrix} \right\} &= (1 - 2\zeta^2) \pm 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2} = 1 \pm 2\zeta + o(\zeta) \Rightarrow \\ \left. \begin{matrix} \beta_2 \\ \beta_1 \end{matrix} \right\} &= 1 \pm \zeta + o(\zeta) \end{aligned} \quad (2-94)$$

Landausymbolet $o(x)$ er defineret ved

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0 \quad (2-95)$$

Halvbåndsbredden bliver da

$$\Delta\omega = \omega_0(\beta_2 - \beta_1) = (2\zeta + o(\zeta))\omega_0 \quad (2-96)$$

For svagt dæmpede konstruktioner, hvor $\zeta \ll 1$, kan man se bort fra restleddet i (2-96). Endvidere er $\omega_0 \simeq \omega_{0,m}$, idet $\omega_{0,m}$ er den cykliske frekvens, hvor $|H(\omega)|^2$ og $D^2(\zeta, \beta)$ er maksimale. Dette muliggør en alternativ fremgangsmåde for parameteridentifikation i et svagtdæmpet system. Man starter med at måle $|H(\omega)|^2$. På grafen for denne bestemmes dernæst halvbåndsbredden $\Delta\omega$ og den cykliske frekvens $\omega_{0,m}$. Herved haves

$$\omega_0 = \omega_{0,m} \quad (2-97)$$

$$\zeta = \frac{\Delta\omega}{2\omega_{0,m}} \quad (2-98)$$

Metoden kan udbygges til ikke svagtdæmpede underkritisk dæmpede systemer. I så fald må restleddet i (2-96) tages i regning, og $\omega_{0,m}$ må udtrykkes som funktion af ω_0 og ζ .

Hidtil er den ydre kraft $f(t)$ antaget at være harmonisk varierende, jvf. (2-62). Nu antages blot, at $f(t)$ er periodisk med perioden T . Iht. (A-1) kan $f(t)$ da udvikles i en *Fourierrække*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \omega_m t + b_m \sin \omega_m t = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{Re}(F_m e^{i\omega_m t}) \quad (2-99)$$

hvor

$$\omega_m = m \frac{2\pi}{T}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2-100)$$

$$\left. \begin{aligned} a_m &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega_m t dt, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ b_m &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega_m t dt, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2-101)$$

Den komplekse kraftamplitude skrives på polær form

$$F_m = |F_m| e^{-i\alpha_m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2-102)$$

Ved indsætning af (2-102) i (2-99) findes heraf

$$\left. \begin{aligned} |F_m| \cos \alpha_m &= a_m \\ |F_m| \sin \alpha_m &= b_m \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$|F_m| = (a_m^2 + b_m^2)^{\frac{1}{2}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2-103)$$

$$\tan \alpha_m = \frac{b_m}{a_m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2-104)$$

Når (2-99) indsættes på højresiden af (2-38) kan den stationære bevægelse bestemmes ved superposition af den stationære bevægelse fra hver af de harmoniske komponenter. Ved (2-66), (2-68) findes

$$x(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{Re}(X_m e^{i\omega_m t}) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{m=1}^{\infty} |X_m| \cos(\omega_m t - \Psi_m) \quad (2-105)$$

$$X_m = H(\omega_m)F_m \quad (2-106)$$

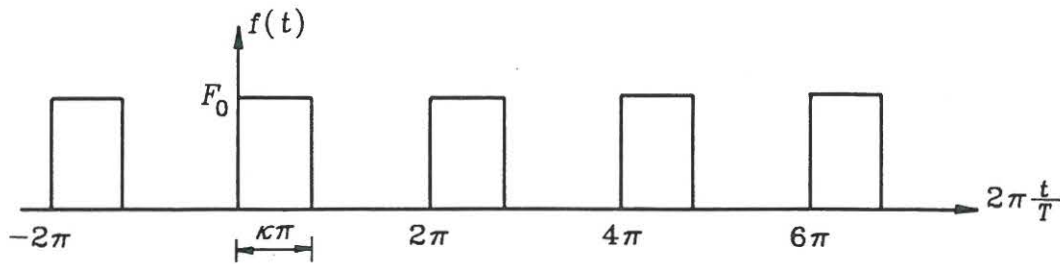
hvor $H(\omega)$ er givet ved (2-69), og $X_m = |X_m|e^{-i\Psi_m}$, $m = 1, 2, \dots$

Den ukendte amplitude $|X_m|$ og fase Ψ_m bestemmes da af (2-76), (2-77) og (2-78)

$$|X_m| = |H(\omega_m)||F_m| = \frac{|F_m|}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_m^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega_m^2}} \quad (2-107)$$

$$\Psi_m = \Psi_0(\omega_m) + \alpha_m = \text{Arctan}\left(\frac{2\zeta\omega_0\omega_m}{\omega_0^2 - \omega_m^2}\right) + \alpha_m \quad (2-108)$$

Eksempel 2-5: Rektangulær periodisk pulsbelastning



Figur 2-17: Rektangulær pulsbelastning.

Figur 2-17 viser en periodisk belastning med perioden T , bestående af rektangulære pulser af højden F_0 og bredden $\kappa \cdot \frac{T}{2}$, hvor $\kappa \in [0, 2[$. Fourierrækken konvergerer mod $\frac{F_0}{2}$ i diskontinuitetspunkterne. Ved udregning og anvendelse af (2-101) findes

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \kappa F_0 \\ a_m &= \frac{F_0}{m\pi} \sin m\kappa\pi \\ b_m &= \frac{F_0}{m\pi} (1 - \cos m\kappa\pi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \kappa F_0 \\ |F_m| &= \frac{F_0}{m\pi} \sqrt{2 - 2 \cos m\kappa\pi} \\ \tan \alpha_m &= \frac{1 - \cos m\kappa\pi}{\sin m\kappa\pi} \end{aligned} \right\} \quad (2-109)$$

Den stationære del af bevægelsen følger dernæst umiddelbart ved indsætning af (2-109) i (2-107) og (2-108).

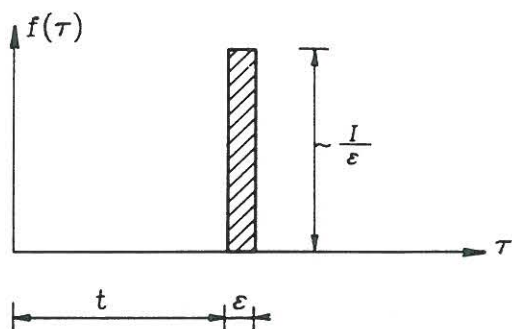
2.6 Tvungne svingninger af systemer af 1 frihedsgrad som følge af arbitrær påvirkning

I dette afsnit bestemmes bevægelsen af et lineært viskøst dæmpet system af 1 frihedsgrad som følge af en ydre dynamisk belastning $f(t)$, som hverken er harmonisk eller periodisk. Kraften antages påført til tidspunktet $t = 0$, i.e.

$$f(t) = 0, \quad t < 0 \quad (2-110)$$

Ved *impulsen* forstås tidsintegralet

$$I(t) = \int_{0^-}^t f(\tau) d\tau \quad (2-111)$$



Figur 2-18: Impulsiv belastning.

Oftentimes one has to deal with forces of great intensity, which act in a small time interval, so that the impulse remains bounded. Such forces are called *impulsive*. Figur 2-18 shows an impulsive force of magnitude $f(\tau) = \frac{I}{\epsilon}$, which acts for time t , and is constant in an interval of length ϵ . The impulse of the load is obviously I . Let now $\epsilon \rightarrow 0$, so that the impulse is constant I under the whole transition. Here we have $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I}{\epsilon} = \infty$. In the limit the load can be described by *Dirac's deltafunction*

$$f(\tau) = I\delta(t - \tau) \quad (2-112)$$

Er $I = 1$ betegnes $f(\tau)$ en *enhedsimpuls*.

Impulsbelastningen (2-112) påføres massen. Ved impulsætningen have

$$\int_{t^-}^{t^+} f(\tau) d\tau = I = m\Delta\dot{x} \Rightarrow$$

$$\Delta\dot{x} = \frac{I}{m} \quad (2-113)$$

En impulsiv belastning giver således anledning til en diskontinuert ændring af hastigheden. Da belastningen virker i uendeligt kort tid, sker der ingen ændring af flytningen, i.e.

$$\Delta x = 0 \quad (2-114)$$

Betragt et lineært viskos dæmpet system, der befinder sig i hvile til tiden $t = 0^-$. Til tiden $t = 0$ påføres en enhedsimpuls. Opgaven er da at bestemme bevægelsen $h(t)$ for $t > 0$. Bevægelsesligningen bliver iht. (2-38) og (2-112)

$$m(\ddot{h} + 2\zeta\omega_0\dot{h} + \omega_0^2 h) = \delta(t) \quad (2-115)$$

Da systemet er i hvile før påvirkningen påføres, er

$$h(0^-) = \dot{h}(0^-) = 0 \quad (2-116)$$

Af (2-114) følger

$$h(0^+) = 0 \quad (2-117)$$

(2-115) integreres fra $t = 0^-$ til $t = 0^+$. Ved (2-116) og (2-117) findes

$$m \left(\int_{0^-}^{0^+} \ddot{h}(t) dt + \int_{0^-}^{0^+} 2\zeta\omega_0 \dot{h}(t) dt + \omega_0^2 \int_{0^-}^{0^+} h(t) dt \right) = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt \Rightarrow$$

$$m(\dot{h}(0^+) - \dot{h}(0^-) + 2\zeta\omega_0(h(0^+) - h(0^-))) = 1 \Rightarrow$$

$$\dot{h}(0^+) = \frac{1}{m} \quad (2-118)$$

(2-118) følger også direkte af (2-113).

$h(t)$ betegnes *impulsresponsfunktionen*. Af (2-115), (2-117), (2-118) følger, at denne bestemmes som løsning til begyndelsesværdiproblemet

$$\left. \begin{aligned} \ddot{h} + 2\zeta\omega_0\dot{h} + \omega_0^2 h &= 0, \quad t > 0 \\ h(0^+) &= 0, \quad \dot{h}(0^+) = \frac{1}{m} \end{aligned} \right\} \quad (2-119)$$

Det fremgår heraf, at $h(t)$ for $t > 0$ er løsning til egensvingningsligningen (2-44). Løsningen til (2-119) følger da ved specialisering af (2-46)

$$h(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin \omega_d t & , \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (2-120)$$

Af (2-115), (2-117), (2-118) følger

$$\ddot{h}(0^+) = -2\zeta\omega_0 \frac{1}{m} \quad (2-121)$$

Ved differentiation af (2-119) ses, at $\dot{h}(t)$ for $t > 0$ ligeledes er løsning til (2-44). Begyndelsesbetingelserne er givet ved (2-118) og (2-121). Dette fører til begyndelsesværdiproblemet

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \dot{h} + 2\zeta\omega_0 \frac{d}{dt} \dot{h} + \omega_0^2 \dot{h} &= 0, \quad t > 0 \\ \dot{h}(0^+) &= \frac{1}{m}, \quad \frac{d}{dt} \dot{h}(0^+) = -2\zeta\omega_0 \frac{1}{m} \end{aligned} \right\} \quad (2-122)$$

Betragt størrelsen

$$x^{(1)}(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad t > 0 \quad (2-123)$$

Ved differentiation af (2-123), og anvendelse af (2-117), (2-118) findes

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(1)}(t) &= h(t-t)f(t) + \int_0^t \dot{h}(t-\tau)f(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \dot{h}(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (2-124)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(1)}(t) &= \dot{h}(t-t)f(t) + \int_0^t \ddot{h}(t-\tau)f(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{m}f(t) + \int_0^t \ddot{h}(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2-125)$$

Af (2-123), (2-124), (2-125) findes

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + 2\zeta\omega_0 \dot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} &= \frac{1}{m}f(t) \\ &+ \int_0^t [\ddot{h}(t-\tau) + 2\zeta\omega_0 \dot{h}(t-\tau) + \omega_0^2 h(t-\tau)]f(\tau)d\tau, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2-126)$$

Det følger af (2-119), at leddet i den skarpkantede parentes i integranden på højresiden af (2-126) er lig 0. Følgelig haves

$$\ddot{x}^{(1)} + 2\zeta\omega_0 \dot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \frac{1}{m}f(t), \quad t > 0 \quad (2-127)$$

(2-127) viser, at $x^{(1)}(t)$ givet ved (2-123) er et partikulært integral til (2-38). Af (2-123) og (2-124) følger, at det partikulære integral tilfredsstiller begyndelsesbetingelserne

$$x^{(1)}(0) = \dot{x}^{(1)}(0) = 0 \quad (2-128)$$

Den fuldstændige løsning til (2-38) kan skrives

$$x(t) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t), \quad t > 0 \quad (2-129)$$

$x^{(0)}(t)$ er en løsning til den homogene differentialligning (2-44). Af (2-39), (2-128), (2-129) ses, at $x^{(0)}(t)$ skal tilfredsstille begyndelsesbetingelserne

$$x^{(0)}(0) = x_0, \quad \dot{x}^{(0)}(0) = \dot{x}_0 \quad (2-130)$$

(2-130) indebærer, at den transiente del af bevægelsen er givet ved (2-46). Heraf følger, at den søgte bevægelse er givet ved

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left[x_0 \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t) \right] + \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad t > 0 \quad (2-131)$$

Af (2-119) og (2-122) følger, at $h(t)$ og $\dot{h}(t)$ udgør 2 lineært uafhængige løsninger til den homogene differentialligning. Følgelig kan $x^{(0)}(t)$ skrives som en linearkombination af $h(t)$ og $\dot{h}(t)$, i.e.

$$x^{(0)}(t) = ah(t) + b\dot{h}(t) \Rightarrow \quad (2-132)$$

$$\dot{x}^{(0)}(t) = a\dot{h}(t) + b\ddot{h}(t) \quad (2-133)$$

Udviklingskonstanterne a og b bestemmes af begyndelsesbetingelserne (2-117), (2-118), (2-121)

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a0 + b\frac{1}{m} \\ \dot{x}_0 &= a\frac{1}{m} + b\left(-2\zeta\omega_0\frac{1}{m}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} a &= m\dot{x}_0 + m2\zeta\omega_0 x_0 \\ b &= mx_0 \end{aligned} \right\} \quad (2-134)$$

Ved (2-45) findes herved

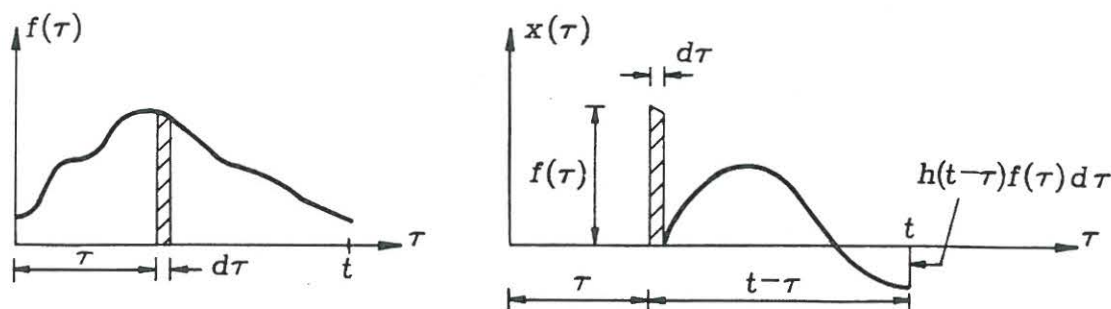
$$x^{(0)}(t) = (m\dot{h}(t) + ch(t))x_0 + mh(t)\dot{x}_0 \quad (2-135)$$

Herved kan (2-131) skrives på formen

$$x(t) = (m\dot{h}(t) + ch(t))x_0 + mh(t)\dot{x}_0 + \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad t > 0 \quad (2-136)$$

(2-136) viser at bevægelsen, som følge af vilkårlige begyndelsesbetingelser x_0, \dot{x}_0 og vilkårlig påvirkning $f(t)$, er bestemt udelukkende af impulsresponsfunktionen $h(t)$, givet ved (2-120).

Den ikke-transiente del af bevægelsen givet ved (2-123) betegnes *Duhamels integral*.



Figur 2-19: Fysisk tolkning af Duhamels integral.

I (2-123) repræsenterer $f(\tau)d\tau$ en differentiell impuls, der påføres til tiden $t = \tau$. Størrelsen af impulsen er lig arealet af det skraverede areal på figur 2-19. Bevægelsen til tiden t fra impulsen $f(\tau)d\tau$ er lig $h(t-\tau)f(\tau)d\tau$. (2-123) angiver dermed den superponerede bevægelse fra samtlige delimpulser af den omtalte type.

(2-115) ganges med $e^{-i\omega t}$ på begge sider af lighedstegnet, efterfulgt af en integration over intervallet $]-\infty, \infty[$. Af (2-120) følger $h(-\infty) = \dot{h}(-\infty) = h(\infty) = \dot{h}(\infty) = 0$. Ved delvis integration findes herved

$$\begin{aligned} & m \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{h}(t)e^{-i\omega t}dt + m2\zeta\omega_0 \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}(t)e^{-i\omega t}dt + m\omega_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}dt \Rightarrow \\ & m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_0\omega i) \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt = 1 \end{aligned} \quad (2-137)$$

På højresiden af (2-137) er benyttet, at for en vilkårlig funktion $f(t)$, der er kontinuert i t_0 , gælder

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0) \quad (2 - 138)$$

Af (2-69) og (2-137) følger

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2 - 139)$$

$H(\omega)$ er følgelig den *Fouriertransformerede* af $h(t)$, jf. (A-14). Ved (A-13) findes herved

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad t > 0 \quad (2 - 140)$$

Ved (2-110), (2-120) kan (2-123) skrives

$$x^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (2 - 141)$$

Ved Fouriertransformationens foldningssætning (A-17), (A-18) bliver den Fouriertransformerede af $x^{(1)}(t) = \int_0^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau$ herved

$$X^{(1)}(\omega) = H(\omega) F(\omega) \quad (2 - 142)$$

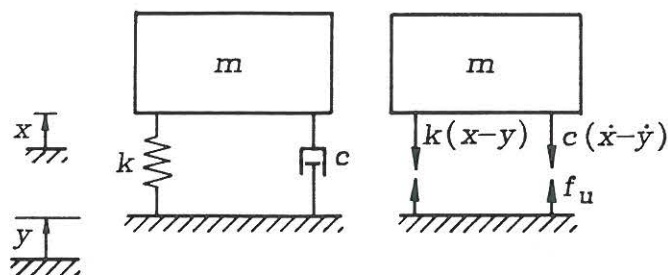
hvor

$$X^{(1)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{(1)}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} x^{(1)}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2 - 143)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2 - 144)$$

I det sidste udsagn af (2-143) er benyttet, at $x^{(1)}(t) = 0$, $t \leq 0$, hvilket følger af (2-123) i forbindelse med $h(t) = f(t) = 0$, $t < 0$. Det sidste udsagn af (2-144) følger af (2-110).

2.7 Bevægelig understøtning



Figur 2-20: Bevægelig understøtning.

Svingninger fremkaldt af understøtningens bevægelser forekommer i mange tilfælde. Et vigtigt eksempel er jordskælv.

I figur 2-20 angiver $x(t)$ flytningen af massen fra den statiske ligevægtstilstand. $y(t)$ er flytningen af understøtningepunktet, regnet positiv i samme retning som $x(t)$. Den relative flytning af massen i forhold til understøtningen er da givet ved

$$z = x - y \quad (2 - 145)$$

Forlængelsen af fjederen er $z = x - y$, og strækningshastigheden af dæmperen er $\dot{z} = \dot{x} - \dot{y}$. Følgelig påvirkes den fritskårne masse af de i figur 2-20 viste kræfter. Newtons 2. lov giver

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k(x - y) - c(\dot{x} - \dot{y}) \Rightarrow \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= c\dot{y}(t) + ky(t), \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2 - 146)$$

Ved indføring af (2-146) antager (2-147) formen

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}(t), \quad t > 0 \quad (2 - 147)$$

Det antages, at understøtningens bevægelse $y(t)$ er en kendt funktion af tiden. (2-146) og (2-147) er herved bragt på standardformen (2-38), og angiver bevægelsesligninger til bestemmelse af henholdsvis den totale flytning $x(t)$ og den relative flytning $z(t)$. Formuleringen (2-147) foretrækkes ofte i jordskælvsdesign, da det er den relative flytning, der er bestemmende for påvirkningen på bærende konstruktionselementer.

Kraften på understøtningen regnet positiv i retning af x og y bliver, se figur 2-20

$$f_u(t) = kz + c\dot{z} \quad (2 - 148)$$

Den stationære bevægelse ønskes bestemt, når bevægelsen af understøtningen er harmonisk, dvs.

$$y(t) = \operatorname{Re}(Y e^{i\omega t}) = |Y| \cos(\omega t - \alpha) \quad (2 - 149)$$

$$Y = |Y|e^{-i\alpha} \quad (2-150)$$

Belastningsleddet i (2-146) er da givet ved

$$f(t) = \text{Re}(Fe^{i\omega t}) \quad (2-151)$$

$$F = (k + i\omega)Y \quad (2-152)$$

Den stationære bevægelse til (2-146) følger da af (2-68) ved anvendelse af (2-7), (2-45), (2-77)

$$x(t) = \text{Re}(Xe^{i\omega t}) = |X| \cos(\omega t - \Psi) \quad (2-153)$$

$$X = |X|e^{-i\Psi} = H(\omega)(k + i\omega)Y$$

$$= \frac{k + i\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_0\omega i)} Y = \frac{1 + 2\zeta\beta i}{1 - \beta^2 + 2\zeta\beta i} Y$$

$$= \left| \frac{1 + 2\zeta\beta i}{1 - \beta^2 + 2\zeta\beta i} \right| e^{-i\Psi_1} |Y| e^{-i\alpha} = \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2\beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}} |Y| e^{-i(\Psi_1 + \alpha)} \quad (2-154)$$

hvor

$$\tan \Psi_1 = \frac{2\zeta\beta^3}{1 - \beta^2 + 4\zeta^2\beta^2} \quad (2-155)$$

Heraf følger

$$|X| = \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2\beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}} |Y| \quad (2-156)$$

$$\Psi = \Psi_1 + \alpha \quad (2-157)$$

$$T(\zeta, \beta) = \frac{|X|}{|Y|} = \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2\beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}} \text{ betegnes transmissionskoefficienten.}$$

Belastningsleddet i (2-147) bliver

$$f(t) = \text{Re}(Fe^{i\omega t}) \quad (2-158)$$

$$F = m\omega^2 Y \quad (2-159)$$

Den stationære bevægelse til (2-147) følger af (2-68)

$$z(t) = \text{Re}(Ze^{i\omega t}) = |Z| \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\begin{aligned} Z &= |Z|e^{-i\varphi} = H(\omega)m\omega^2 Y = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_0\omega i} Y \\ &= \left| \frac{\beta^2}{1 - \beta^2 + 2\zeta\beta i} \right| e^{-i\Psi_0} |Y| e^{-i\alpha} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}} |Y| e^{-i(\Psi_0 + \alpha)} \end{aligned} \quad (2-160)$$

hvor Ψ_0 er givet ved (2-81) Heraf følger

$$|Z| = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}} |Y| \quad (2-161)$$

$$\varphi = \Psi_0 + \alpha \quad (2-162)$$

Kraften på understøtningen bliver ved (2-148), (2-160)

$$f_u(t) = \text{Re}(F_u e^{i\omega t}) = |F_u| \cos(\omega t - \gamma) \quad (2-163)$$

$$\begin{aligned} F_u &= |F_u|e^{-i\gamma} = (k + i c\omega)Z = m(\omega_0^2 + 2\zeta\omega_0\omega i)Z \\ &= m\omega_0^2 \frac{(1 + 2\zeta\beta i)\beta^2}{1 - \beta^2 + 2\zeta\beta i} Y = m\omega_0^2 \beta^2 \left| \frac{1 + 2\zeta\beta i}{1 - \beta^2 + 2\zeta\beta i} \right| e^{-i\Psi_1} |Y| e^{-i\alpha} \\ &= m\omega_0^2 \beta^2 \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2\beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}} |Y| e^{-i(\Psi_1 + \alpha)} \end{aligned} \quad (2-164)$$

Heraf følger

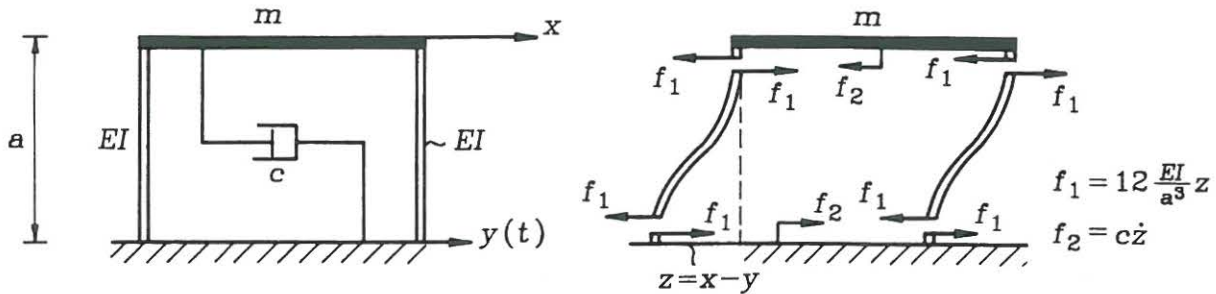
$$|F_u| = m\omega_0^2 \beta^2 \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2\beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}} |Y| \quad (2-165)$$

$$\gamma = \Psi_1 + \alpha \quad (2-166)$$

Ψ_1 er givet ved (2-155).

Af (2-157) og (2-166) følger, at $x(t)$ og $f_u(t)$ er i fase under harmonisk bevægelse af vederlaget.

Eksempel 2-6: Jordskælvspåvirkning af 1-etages rammekonstruktion



Figur 2-21: Jordskælvspåvirkning af system af 1 frihedsgrad.

Figur 2-21 viser en 1 etages ramme, der påvirkes af en vandret flytning $y(t)$ af vederlaget. Bjælken har den samlede masse m , og antages uendelig stiv overfor såvel axial- som bøjningsdeformationer. Søjlerne antages masseløse, lineærelastiske med bøjningsstivheden EI og længden a . Søjlerne antages fuldt indspændt i vederlaget og bjælken. Bevægelsesligningen ønskes opstillet.

Systemet har 1 frihedsgrad, der vælges som bjælkens vandrette flytning x . Bjælken skæres fri, og forskydningskræfterne $f_1 = 12 \frac{EI}{a^3} z$ og dæmpningskraften $f_2 = c \dot{z}$ påføres som ydre kræfter, hvor $z = x - y$. Ved Newtons 2. lov haves

$$m\ddot{x} = -2 \cdot 12 \frac{EI}{a^3} z - c\dot{z}, \quad z = x - y \Rightarrow$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}, \quad t > 0 \quad (2-167)$$

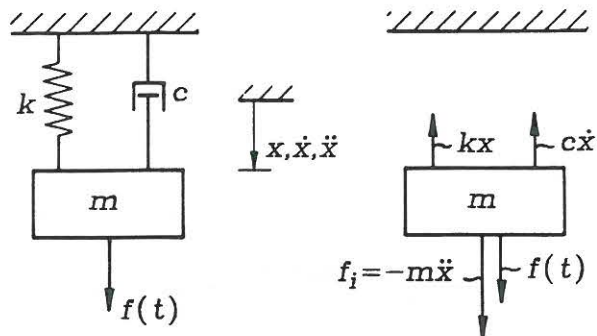
$$k = 24 \frac{EI}{a^3} \quad (2-168)$$

(2-167) er herved identisk med standardformen (2-147).

Dæmpningen skyldes dissipation i søjlerne. Hver af disse bidrager lige meget til dæmpningskraften. Heraf følger, at belastningen f_u på hvert af søjlefundamenterne bliver

$$f_u = f_1 + \frac{1}{2} f_2 = 12 \frac{EI}{a^3} z + \frac{1}{2} c\dot{z} \quad (2-169)$$

2.8 D'Alemberts princip



Figur 2-22: D'Alemberts princip.

Newtons 2. lov for den fritskårne masse lyder

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + f(t) \quad (2-170)$$

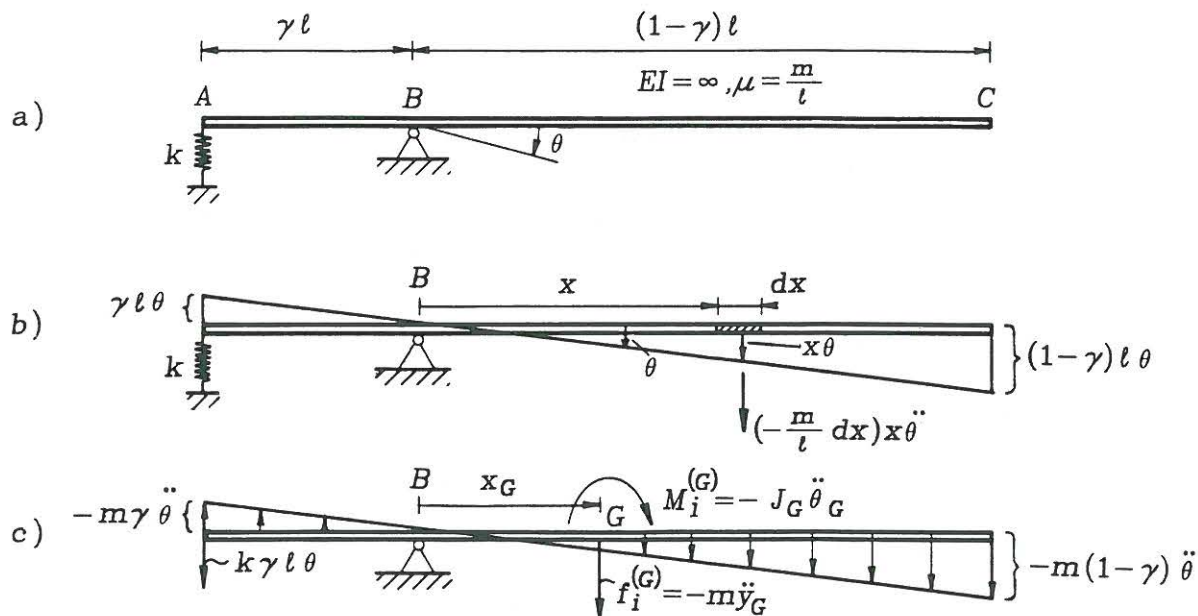
Ligningen skrives formelt på formen

$$0 = -m\ddot{x} - kx - c\dot{x} + f(t) \quad (2-171)$$

(2-171) kan opfattes som en statisk ligevægtsligning, hvor *inertikraften* $f_i = -m\ddot{x}$ påføres som ydre belastning på den fritskårne masse. f_i regnes positiv i retning af frihedsgraden x . Dette udtrykker *d'Alemberts princip*: $f_i = -m\ddot{x}$ påføres som ydre kraft, hvorefter alle beregninger foretages ved formelle statiske beregninger. D'Alemberts princip finder også anvendelse ved multi-frihedsgradssystemer og ved kontinuerte systemer.

Det skal understreges, at d'Alemberts princip er et rent regneteknisk fif uden fysisk indhold, der letter opstillingen af bevægelsesligningerne. Der eksisterer således ingen "inertikraft". Derimod er (2-170) en observerbar fysisk kendsgerning. Når massen påføres en kraft lig højresiden af (2-170), måler man netop en acceleration af den angivne størrelse.

Eksempel 2-7: Plan uendelig stiv homogen bjælke



Figur 2-23: Inertibelastning på plan uendelig stiv homogen bjælke med fjedrende understøtning. a) Definition af frihedsgrad. b) Inertibelastning på differentielt bjælkeelement. c) Inertibelastning pr. længdeenhed og statisk ækvivalent inertibelastning refereret til massefyndpunktet.

Figur 2-23a viser en plan uendelig stiv homogen bjælke ABC af samlet længde l og samlet masse m . Massen pr. længdeenhed er herved konstant $\mu = \frac{m}{l}$. AB har længden γl og BC har længden $(1-\gamma)l$, $\gamma \in]0, 1[$. I B er anordnet en fast simpel understøtning og i punkt A en lineær elastisk fjeder med fjederstivheden k . Figuren viser bjælken i den statiske ligevægtstilstand. Bevægelsesligningen for små svingninger om denne ønskes opstillet.

Da bjælken er uendelig stiv, har systemet 1 frihedsgrad. Denne vælges som drejningen θ om punkt B , regnet positiv som vist i figur 2-23a.

Der indføres en koordinat x langs bjælken, målt fra punkt B og regnet positiv mod punkt C , se figur 2-23b. Et bjælkeelement af længden dx , beliggende ved koordinaten x , har massen $\frac{m}{l} dx$. Elementets flytning bliver $x\theta$, og accelerationen herved $x\ddot{\theta}$. Elementet påvirkes herved af en inertibelastning på $(-\frac{m}{l} dx) x \ddot{\theta}$, regnet positiv i samme retning som flytningen. Inertibelastningen pr. længdeenhed varierer lineært, og er vist i figur 2-23c.

Endvidere fritskæres fjederen ved punkt A , idet fjederkraften $k \cdot \gamma l \theta$ påføres som ydre belastning. I henhold til d'Alemberts princip kan systemet nu analyseres ved rent statiske ligevægtsligninger.

Lodret kraftligevægt bestemmer den ukendte reaktion på bjælken i punkt B . Ved at tage moment om punkt B udgår reaktionen af momentligningen, der herved direkte bestemmer bevægelsesligningen

$$k \cdot \gamma l \theta \cdot \gamma l = \int_{-\gamma l}^{(1-\gamma)l} \left(-\frac{m}{l} dx x \ddot{\theta}\right) \cdot x \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}((1-\gamma)^3 + \gamma^3) m l^2 \ddot{\theta} + k \gamma^2 l^2 \theta = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (2-172)$$

$$\omega_0^2 = \frac{3\gamma^2}{1-3\gamma+3\gamma^2} \frac{k}{m} \quad (2-173)$$

Det bemærkes, at den her benyttede anvendelse af D'Alemberts princip er ækvivalent med impulsmomentsætningen opstillet i punkt B .

Da bjælken er uendelig stiv, er inertibelastningen statisk ækvivalent med en enkeltkraft f_i og et moment M_i refereret til et vilkårligt punkt langs bjælken. Refereres f_i til punkt B findes

$$f_i = \int_{-\gamma l}^{(1-\gamma)l} \left(-\frac{m}{l} dx x \ddot{\theta} \right) = -m \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) l \ddot{\theta} \quad (2-174)$$

$$M_i^{(B)} = \int_{-\gamma l}^{(1-\gamma)l} \left(-\frac{m}{l} dx x \ddot{\theta} \right) x = -\frac{1}{3} (1-3\gamma+3\gamma^2) m l^2 \ddot{\theta} \quad (2-175)$$

Koordinaten af massetyngdepunktet G er $x_G = (\frac{1}{2} - \gamma)l$. Refereres belastningen derfor til massetyngdepunktet, bliver den statisk ækvivalente belastning

$$f_i^{(G)} = -m \ddot{y}_G \quad (2-176)$$

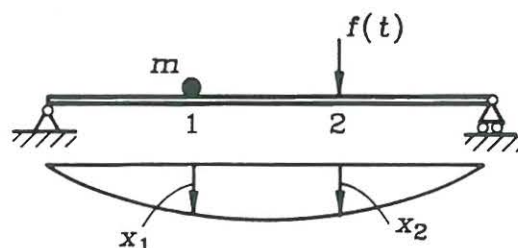
$$M_i^{(G)} = M_i^{(B)} - f_i^{(G)} x_G = -J_G \ddot{\theta}_G \quad (2-177)$$

$$J_G = \frac{1}{12} m l^2 \quad (2-178)$$

hvor $y_G = x_G \theta$ er massetyngdepunktets flytning, $\theta_G = \theta$ er massetyngdepunktets rotation og J_G er masseinertimomentet om massetyngdepunktet.

Inertibelastningen på den udbredte masse kan da påføres som en enkeltkraft $f_i^{(G)} = -m \ddot{y}_G$ og et moment $M_i^{(G)} = -J_G \ddot{\theta}_G$ refereret til massetyngdepunktet. Flytningen y_G og rotationen θ_G af massetyngdepunktet udtrykkes derefter som lineære funktioner af den udbredte masses frihedsgrad. Dette princip kan generaliseres til vilkårlige udbredte uendeligt stive masser.

2.9 Indirekte påvirkning



Figur 2-24: Indirekte påvirkning af punktformig masse.

Ved indirekte belastning forstås, at den ydre kraft $f(t)$ ikke angriber ved massen.

Figur 2-24 viser en lineærelastisk, simpelt understøttet bjælke med en koncentreret masse m og en indirekte virkende ydre kraft $f(t)$. Flytningen ved massen (pkt. 1) betegnes x_1 . Flytningen ved kraften (pkt. 2) betegnes x_2 . En enhedskraft ved pkt. 2 giver nedbøjningen δ_{12} ved pkt. 1. En enhedskraft ved pkt. 1 giver nedbøjningen δ_{11} ved pkt. 1. I pkt. 1 virker inertikraften $f_i = -m\ddot{x}_1$. I pkt. 2 virker den ydre kraft $f(t)$.

x_1 er sammensat af nedbøjningsbidrag fra f og f_i . Herved

$$x_1 = \delta_{11}f_i + \delta_{12}f(t) \Rightarrow$$

$$m\ddot{x}_1 + \frac{1}{\delta_{11}}x_1 = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}f(t) \quad (2-179)$$

Påvirkes systemet af den direkte virkende kraft $f_1(t)$ ved massen i pkt. 1 og de indirekte virkende kræfter $f_2(t), \dots, f_n(t)$ i punkterne 2, \dots , n findes mere generelt

$$x_1 = \delta_{11}(-m\ddot{x}_1 + f_1(t)) + \sum_{j=2}^n \delta_{1j}f_j(t) \Rightarrow$$

$$m\ddot{x}_1 + \frac{1}{\delta_{11}}x_1 = f_1(t) + \frac{1}{\delta_{11}} \sum_{j=2}^n \delta_{1j}f_j(t) \quad (2-180)$$

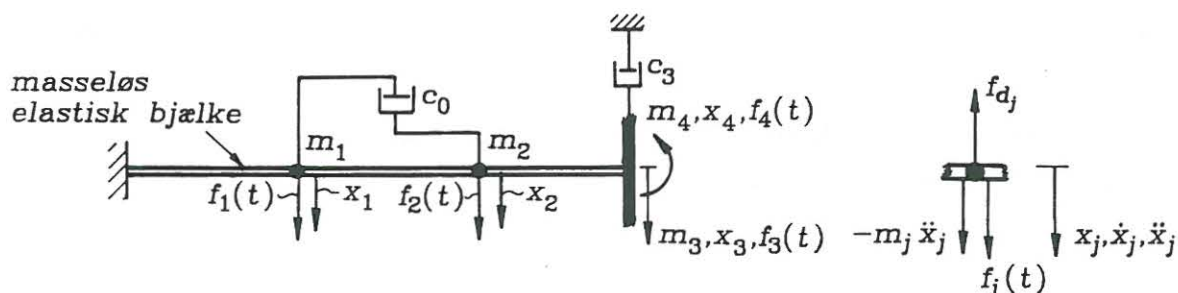
(2-180) og (2-181) er herved reduceret til standardformen (2-38).

δ_{1j} er *influenstallet* for nedbøjningen i pkt. 1 fra en enhedskraft i pkt. j . Influenstallene for ofte forekommende tilfælde ved statisk bestemte retlinede Bernoulli-Eulerbjælkekonstruktioner med konstant tværsnit er anført i appendix B.

3. SVINGNINGER AF SYSTEMER AF n FRIHEDSGRA- DER

For et system af n frihedsgrader fastlægges systemets bevægelse ved n koordinater. Systemet består af et endeligt antal koncentrerede punktformige masser og af et endeligt antal udbredte stive masser. Beskrivelsen af bevægelsen af hver koncentreret masse kræver 1, 2 eller 3 koordinater. For stive udbredte masser kræves 1, 2 eller 3 koordinater til fastlæggelse af massetyngdepunktets placering, og herudover 1, 2 eller 3 koordinater til fastlæggelse af rotationer om dette.

3.1 Grundligning for dæmpede, tvungne svingninger



Figur 3-1: Tvungne, dæmpede svingninger af system af n frihedsgrader.

Flytnings- og rotationsfrihedsgrader betegnes under et x_j og den tilhørende masse eller det tilhørende masseinertimoment betegnes m_j . Ved udbredte masser refereres flytningsfrihedsgraderne til massetyngdepunktet, og m_j er masseinertimomentet om dette.

$f_j(t)$ betegner den ydre belastning på massen m_j udover den statiske belastning. Er x_j en flytning, er $f_j(t)$ en kraft. Er x_j en rotation, er $f_j(t)$ et moment. $f_j(t)$ regnes positiv i samme retning som x_j .

Eventuelle dæmpningselementer på systemet skæres frit. Kraften fra disse på massen m_j betegnes f_{dj} . f_{dj} regnes positiv i modsat retning af x_j .

Ved opstillingen af bevægelsesligningerne benyttes d'Alemberts princip. Inertikraften hørende til x_j bliver $-m_j \ddot{x}_j$, regnet positiv i samme retning som x_j . Hvis x_j er en flytning, er $-m_j \ddot{x}_j$ en kraft. Hvis x_j er en rotation, er $-m_j \ddot{x}_j$ et moment.

Under forudsætning af linearitet, tilvejebringes flytningen x_i i den i . frihedsgrad som en sum af flytningsbidrag fra de ydre dynamiske belastninger $f_j(t)$, dæmpningskræfterne f_{dj} og inertikræfterne $-m_j \ddot{x}_j$ fra alle frihedsgrader x_j , $j = 1, \dots, n$

$$x_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} (f_j - f_{dj} - m_j \ddot{x}_j) \quad (3-1)$$

(3-1) opskrives for alle frihedsgrader x_i , $i = 1, \dots, n$.

δ_{ij} er influenstallet for deformationen i frihedsgrad x_i fra en enhedsbelastning $f_j = 1$ i

frihedsgrad x_j . Af *Maxwells sætning* følger

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (3-2)$$

På matrixform kan (3-1) skrives

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}(\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_d - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}) \quad (3-3)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_d = \begin{bmatrix} f_{d1} \\ \vdots \\ f_{dn} \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

Massematricen \mathbf{M} er her diagonal, fordi flytningsfrihedsgraderne er refereret til masse-tyngdepunktet af de udbredte masser. Ved andre valg fås ikke-diagonale massematricer.

\mathbf{D} givet ved (3-6) betegnes *deformationsmatricen*. Som følge af (3-2) er denne symmetrisk, hvorfor

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^T \quad (3-7)$$

(3-3) skrives på formen

$$\mathbf{D}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} = \mathbf{D}(\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_d) \quad (3-8)$$

Den potentielle energi U fra en statisk belastning $\mathbf{f} \in R^n$ bliver

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{D} \mathbf{f} \quad (3-9)$$

Da U er positiv for alle $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$, indebærer (3-9), at \mathbf{D} er positiv definit. Heraf følger, at \mathbf{D} har en invers matrix \mathbf{K} , der betegnes *stivhedsmatricen*

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1} \quad (3-10)$$

(3-7) indebærer, at også \mathbf{K} er symmetrisk. ($\mathbf{KD} = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{D}^T \mathbf{K}^T = \mathbf{E}^T \Rightarrow \mathbf{DK}^T = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{K}^T = \mathbf{D}^{-1} = \mathbf{K}$).

(3-8) multipliceres foran med $\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{K}$. Herved

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_d \quad (3-11)$$

Indføres $\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{x}$, følger af (3-9)

$$\forall \mathbf{x} \in R^n : |\mathbf{x}| > 0 \Rightarrow U = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} > 0 \quad (3-12)$$

\mathbf{K} er således også positiv definit. De foregående udsagn om definitegenskaberne af \mathbf{D} og \mathbf{K} forudsætter, at konstruktionen er fastholdt mod stiftlegemebevægelser. For visse strukturer (skibe, fly) er dette ikke tilfældet. Her gælder (3-11) fortsat, men \mathbf{K} er singulær med en rang $n - n_o$, hvor n_o er antallet af uafhængige stiftlegemebevægelser. \mathbf{D} og dermed formuleringen (3-8) eksisterer ikke i dette tilfælde. For konstruktioner, der ikke er fastholdt mod stiftlegemebevægelser, er \mathbf{K} kun positiv semidefinit.

Af (3-11) følger, at den j . søjle i \mathbf{K} kan bestemmes som den statiske belastning \mathbf{f} på masserne, der fremkalder deformationstilstanden

$$x_i = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (3-13)$$

Eksempel 3-1: Fastlæggelse af deformationsmatrix for 3-etagers rammekonstruktion

Etagebjælkerne i den på figur 3-2 viste 3-etagers bygning antages uendeligt stive. Søjlerne er Bernoulli-Eulerbjælker, alle med bøjningsstivheden EI . Deformationsmatricen \mathbf{D} ønskes bestemt.

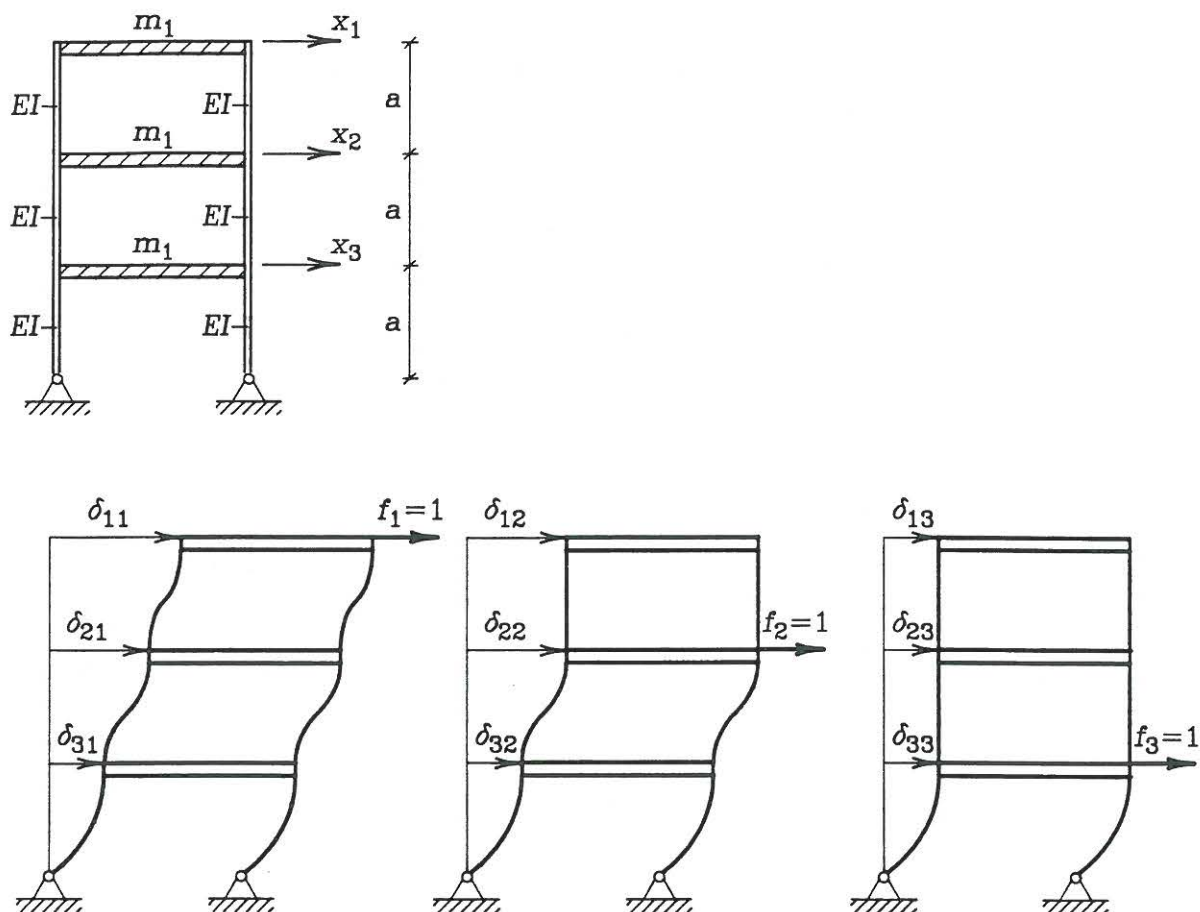
1. søjle i \mathbf{D} bestemmes ved at påføre en kraft $f_1 = 1$ ved x_1 og bestemme udbøjningerne efter frihedsgraderne x_1, x_2, x_3 .

Forskydningskraften er 1 mellem 3. og 2. etage, mellem 2. og 1. etage og mellem 1. etage og understøtningen. 3. etage deformeres herved $\frac{a^3}{24EI}$ i forhold til 2. etage, 2. etage deformeres $\frac{a^3}{24EI}$ i forhold til 1. etage, og 1. etage deformeres $\frac{a^3}{6EI}$ i forhold til understøtningen. Herved

$$\delta_{11} = \frac{a^3}{24EI} + \frac{a^3}{24EI} + \frac{a^3}{6EI} = \frac{6}{24} \frac{a^3}{EI}$$

$$\delta_{21} = \frac{a^3}{24EI} + \frac{a^3}{6EI} = \frac{5}{24} \frac{a^3}{EI}$$

$$\delta_{31} = \frac{a^3}{6EI} = \frac{4}{24} \frac{a^3}{EI}$$



Figur 3-2: Opstilling af deformationsmatrix for 3-etagers ramme.

2. søjle i D bestemmes ved at påføre en kraft $f_2 = 1$ ved x_2 og bestemme udbøjningerne efter x_1, x_2, x_3 .

Forskydningskraften er 0 mellem 3. og 2. etage, 1 mellem 2. etage og 1. etage og 1 mellem 1. etage og understøtningen. 3. etage deformeres herved ikke i forhold til 2. etage, 2. etage deformeres $\frac{a^3}{24EI}$ i forhold til 1. etage, og 1. etage deformeres $\frac{a^3}{6EI}$ i forhold til understøtningen. Herved

$$\delta_{12} = \delta_{22} = \frac{a^3}{24EI} + \frac{a^3}{6EI} = \frac{5}{24} \frac{a^3}{EI}$$

$$\delta_{32} = \frac{a^3}{6EI} = \frac{4}{24} \frac{a^3}{EI}$$

På analog måde ses

$$\delta_{13} = \delta_{23} = \delta_{33} = \frac{4}{24} \frac{a^3}{EI}$$

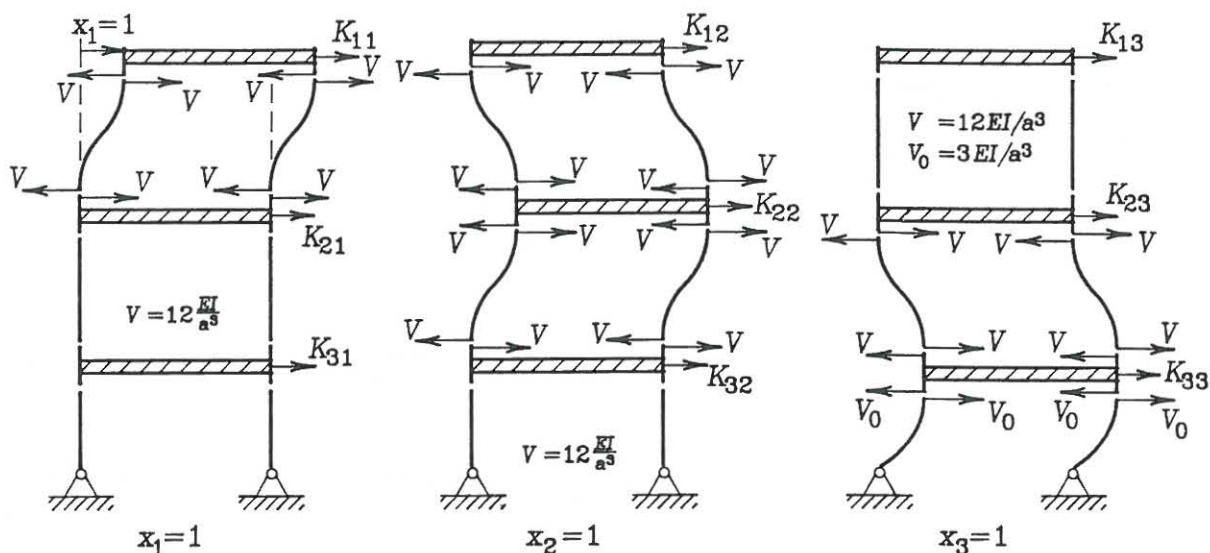
Herved

$$D = \frac{a^3}{24EI} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

(3 - 14)

Eksempel 3-2: Fastlæggelse af stivhedsmatrix for 3-etagers rammekonstruktion

Stivhedsmatricen for den i eksempel 3-1 omtalte plane ramme ønskes bestemt.



Figur 3-3: Opstilling af stivhedsmatrix for 3 etagers ramme.

I figur 3-3 er de ydre kræfter K_{ij} påført de fritskårne masser sammen med de elastiske kræfter. Disse skal være i ligevægt. Herved

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= 24 \frac{EI}{a^3} & K_{12} &= -24 \frac{EI}{a^3} & K_{13} &= 0 \\ K_{21} &= -24 \frac{EI}{a^3} & K_{22} &= 48 \frac{EI}{a^3} & K_{23} &= -24 \frac{EI}{a^3} \\ K_{31} &= 0 & K_{32} &= -24 \frac{EI}{a^3} & K_{33} &= 30 \frac{EI}{a^3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{a^3} \begin{bmatrix} 24 & -24 & 0 \\ -24 & 48 & -24 \\ 0 & -24 & 30 \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

(3-11) multipliceres skalært med $\dot{\mathbf{x}}$. Herved

$$\dot{\mathbf{x}}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}(t) - \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}_d \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} (T + U) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}(t) - \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}_d \quad (3-16)$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} \quad (3-17)$$

$f_i(t) \dot{x}_i dt = f_i(t) dx_i$ angiver arbejdet, som den ydre kraft f_i udfører på massen m_i i løbet af det differentielle tidsinterval dt . Følgelig angiver $\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i f_i$ det samlede arbejde fra de ydre kræfter på systemet pr. tidsenhed.

Tilsvarende angiver $-\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}_d = -\sum_{i=1}^n \dot{x}_i f_{di}$ det samlede arbejde fra dæmpningskræfterne på systemet pr. tidsenhed.

Højresiden af (3-16) angiver herved nettotilvæksten af ydre arbejde pr. tidsenhed. Dette må netop være lig tilvæksten af systemets mekaniske energi pr. tidsenhed. Heraf følger, at T givet ved (3-17) angiver systemets kinetiske energi. Ved udledelsen af (3-16) er \mathbf{M} antaget symmetrisk, dvs.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^T \quad (3-18)$$

Energiligningen i formuleringen (3-16) er omvendt kun gyldig, når (3-18) er opfyldt. Da T er positiv for alle $\dot{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$, følger at \mathbf{M} er positiv definit.

Antag midlertidigt, at $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{0}$. (3-16) kan herved skrives

$$\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}_d = -\frac{d}{dt}(T + U) \quad (3-19)$$

Højresiden af (3-19) angiver tabet i mekanisk energi pr. tidsenhed. Følgelig er $\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}_d$ lig energien, der pr. tidsenhed dissiperes bort som varme.

Systemet af dæmpningskræfter \mathbf{f}_d kaldes *dissipativt*, hvis det for enhver hastighed $\dot{\mathbf{x}}$ af systemet gælder

$$\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}_d > 0 \quad (3-20)$$

Når (3-20) er opfyldt, sker der i henhold til (3-19) et stadigt tab af mekanisk energi, når systemet ikke er påvirket af ydre kræfter.

For at løse bevægelsesligningen (3-11) må en konstitutiv betingelse opstilles for dæmpningskræfterne \mathbf{f}_d . I den mest generelle formulering kan \mathbf{f}_d afhænge eksplicit af flytningen \mathbf{x} , hastigheden $\dot{\mathbf{x}}$ og tiden t

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{f}_d(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \quad (3-21)$$

Ved en *lineært viskos dæmpningsmodel* forstås

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} \quad (3-22)$$

\mathbf{C} betegnes *dæmpningsmatricen*. Denne kan evt. afhænge af tiden svarende til den eksplicitte afhængighed af t i (3-21). Dæmpningskraften f_{di} på massen m_i afhænger i almindelighed ikke blot af dennes hastighed \dot{x}_i , men også af andre massers hastigheder, hvorfor \mathbf{C} ikke er en diagonalmatrix. Yderligere kan anføres, at i modsætning til massematricen \mathbf{M} og stivhedsmatricen \mathbf{K} er \mathbf{C} i almindelighed hverken symmetrisk eller positiv definit.

Af (3-20) og (3-22) følger, at en lineært viskos dæmpningsmodel er dissipativ, hvis og kun hvis dæmpningsmatricen er positiv definit

$$\forall \dot{\mathbf{x}} \in R^n : |\dot{\mathbf{x}}| > 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} > 0 \quad (3-23)$$

Eksempel 3.3: Dæmpningsmodel for udkraget bjælke

Dæmpningskræfterne for det i figur 3-1 viste system bliver

$$\left. \begin{aligned} f_{d1} &= c_o(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ f_{d2} &= c_o(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ f_{d3} &= c_3 \dot{x}_3 \\ f_{d4} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} \quad (3-24)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_o & -c_o & 0 & 0 \\ -c_o & c_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

Dæmpningsmodellen er således lineært viskos. Derimod er dæmpningsmodellen ikke dissipativ. Således medfører $\dot{\mathbf{x}}^T = [\dot{x}_1, -\dot{x}_1, 0, 0]$, $\dot{\mathbf{x}}^T = [0, 0, 0, \dot{x}_4]$, tillige med vilkårlige linearkombinationer af disse hastighedsvektorer, at $\mathbf{f}_d = 0$. Derimod er dæmpningsmodellen positiv semidefinit

$$\forall \dot{\mathbf{x}} \in R^n : |\dot{\mathbf{x}}| > 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} \geq 0 \quad (3-26)$$

\mathbf{C} kan således skrives som en sum af en symmetrisk matrix \mathbf{C}_s og en antimetrisk matrix \mathbf{C}_a

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_s + \mathbf{C}_a \quad (3-27)$$

$$\mathbf{C}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T) \quad (3-28)$$

$$\mathbf{C}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{C}^T) \quad (3-29)$$

Der gælder da

$$\forall \dot{\mathbf{x}} \in R^n : \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{x}} \quad (3-30)$$

$$\text{idet } \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C}_a \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{x}} = 0.$$

\mathbf{C} er således dissipativ, hvis og kun hvis \mathbf{C}_s er positiv definit. Da \mathbf{C}_s er symmetrisk, er dennes egenverdier alle reelle. \mathbf{C}_s er da positiv definit, hvis samtlige egenverdier er positive.

Dæmpningskraften \mathbf{f}_d kan ved (3-22) og (3-27) skrives

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{f}_{ds} + \mathbf{f}_{da} \quad (3-31)$$

$$\mathbf{f}_{ds} = \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{x}} \quad (3-32)$$

$$\mathbf{f}_{da} = \mathbf{C}_a \dot{\mathbf{x}} \quad (3-33)$$

Idet $\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}_{da} = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C}_a \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{x}}) = 0$, følger at $\dot{\mathbf{x}}$ og \mathbf{f}_{da} står vinkelret på hverandre, hvorfor \mathbf{f}_{da} intet arbejde udfører. Det dissipative arbejde er herved udelukkende knyttet til komponenten \mathbf{f}_{ds} . \mathbf{f}_{ds} er imidlertid i almindelighed ikke parallel med hastighedsvektoren $\dot{\mathbf{x}}$. Hastighedsvektorer, hvor dette er tilfældet, opfylder

$$\mathbf{f}_{ds} = \lambda \dot{\mathbf{x}} \quad (3-34)$$

Ved (3-32) findes

$$\mathbf{C}_s \dot{\mathbf{x}} = \lambda \dot{\mathbf{x}} \quad (3-35)$$

(3-35) viser, at de søgte hastighedsvektorer er egenvektorer til \mathbf{C}_s . Proportionalitetsfaktoren λ i (3-34) er en af egenverdierne til \mathbf{C}_s .

Ved indsætning af (3-22) i (3-11) findes herved bevægelsesligningen

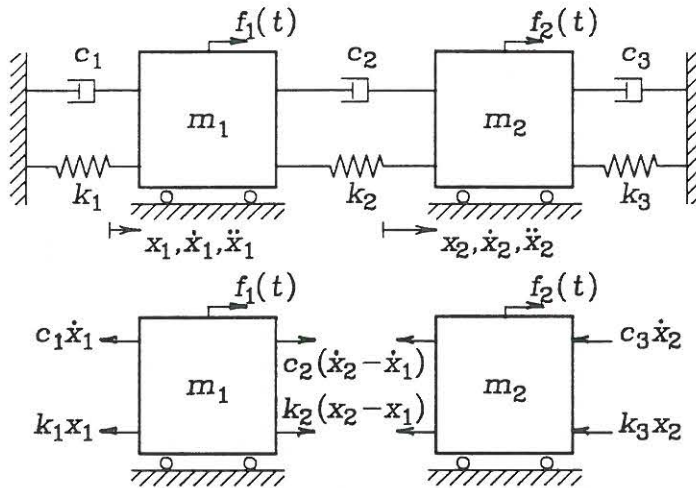
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t), \quad t > 0 \quad (3-36)$$

(3-36) skal løses med hensyn til begyndelsesbetingelserne

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0 \quad (3-37)$$

(3-36), (3-37) er grundligningerne på standardform for tvungne svingninger af et lineært viskos dæmpet system af n frihedsgrader.

Eksempel 3-4: Grundligninger for 2-frihedsgraders system



Figur 3-4: Tvungne svingninger af dæmpet 2-frihedsgraders system.

Bevægelsesligningerne for det i figur 3-4 viste system af 2-frihedsgrader ønskes opstillet.

Den deformerede tilstand i forhold til ligevægtstilstanden fastlægges ved koordinaterne x_1, x_2 . Masserne skæres fri, og de indre fjederkræfter og dæmpningskræfter i den deformerede tilstand påføres som ydre kræfter med de i figur 3-4 viste fortegn.

Newtons 2. lov gælder for hver af masserne

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) - c_1 \dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) - c_3 \dot{x}_2 - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (3-38)$$

På matrixform kan (3-38) skrives

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (3-39)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3-40)$$

Systemet er lineært viskos dæmpet. I dette tilfælde er dæmpningsmatricen positiv definit, hvorfor systemet er dissipativt.

3.2 Udæmpede egensvingninger af n frihedsgraders systemer

Differentialligningen for udæmpede egensvingninger følger af (3-36), (3-37) for $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{0}$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} &= \mathbf{0}, \quad t > 0 \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-41)$$

Løsninger til (3-41) søges på formen

$$\mathbf{x}(t) = \operatorname{Re}(\Phi e^{i\omega t}) \quad (3-42)$$

(3-42) angiver kun en harmonisk bevægelse, hvis ω er reel, jf. (1-3). Dette vises senere at være tilfældet. Foreløbig antages ω at være kompleks, ligesom Φ antages at være en kompleks vektor.

Indsættes (3-42) i (3-41) findes ved argumentationen anført i forbindelse med (2-67)

$$\begin{aligned} \forall t \in R: \operatorname{Re}\left((-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\Phi e^{i\omega t}\right) &= \mathbf{0} \Rightarrow \\ (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\Phi &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3-43)$$

(3-43) er et homogent ligningssystem til bestemmelse af Φ . En nødvendig betingelse for ikke-trivielle løsninger $\Phi \neq \mathbf{0}$ er, at determinanten til koefficientmatricen er lig 0, dvs.

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (3-44)$$

(3-44) repræsenterer en n . gradsligning i ω^2 , der benævnes *den karakteristiske ligning* eller *frekvensbetingelsen*. Rødderne i denne betegnes $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$. Svarende til rødderne $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ eksisterer egentlige løsninger $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(n)}$. Mængden af disse løsninger benævnes systemets *udæmpede egensvingningsformer*.

Sætning 3-1: Hvis \mathbf{M} og \mathbf{K} begge er symmetriske matricer, og enten \mathbf{M} eller \mathbf{K} er positiv definit, er samtlige egenværdier og tilhørende egensvingningsformer reelle.

Bevis:

Antag, at \mathbf{M} er positiv definit. (3-43) opskrives for den k . egensvingningsform, dvs.

$$\mathbf{K}\Phi^{(k)} = \omega_k^2 \mathbf{M}\Phi^{(k)} \quad (3-45)$$

Ved kompleks konjugering af (3-45) følger

$$\mathbf{K}\Phi^{(k)*} = (\omega_k^2)^* \mathbf{M}\Phi^{(k)*} \quad (3-46)$$

Er derfor $(\omega_k^2, \Phi^{(k)})$ en løsning til egenværdiproblemet, er også $((\omega_k^2)^*, \Phi^{(k)*})$ en løsning.

(3-45) ganges foran med $(\Phi^{(k)*})^T$, og (3-46) ganges foran med $\Phi^{(k)T}$. Herved

$$(\Phi^{(k)*})^T \mathbf{K}\Phi^{(k)} = \omega_k^2 (\Phi^{(k)*})^T \mathbf{M}\Phi^{(k)} \quad (3-47)$$

$$\Phi^{(k)T} \mathbf{K}\Phi^{(k)*} = (\omega_k^2)^* \Phi^{(k)T} \mathbf{M}\Phi^{(k)*} \quad (3-48)$$

(3-48) transponeres. Af $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$ og $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$ følger

$$\begin{aligned} (\Phi^{(k)*})^T \mathbf{K}^T \Phi^{(k)} &= (\omega_k^2)^* (\Phi^{(k)*})^T \mathbf{M}^T \Phi^{(k)} \Rightarrow \\ (\Phi^{(k)*})^T \mathbf{K} \Phi^{(k)} &= (\omega_k^2)^* (\Phi^{(k)*})^T \mathbf{M} \Phi^{(k)} \end{aligned} \quad (3-49)$$

Ved subtraktion af (3-49) fra (3-47), findes herved

$$(\omega_k^2 - (\omega_k^2)^*) (\Phi^{(k)*})^T \mathbf{M} \Phi^{(k)} = 0 \quad (3-50)$$

(3-50) kan kun være opfyldt, hvis en af følgende betingelser er opfyldt

$$\omega_k^2 = (\omega_k^2)^* \quad (3-51)$$

$$(\Phi^{(k)*})^T \mathbf{M} \Phi^{(k)} = 0 \quad (3-52)$$

Hvis (3-51) ikke er opfyldt, dvs. $\omega_k^2 \neq (\omega_k^2)^*$, og ω_k^2 derfor er kompleks, må (3-52) nødvendigvis være opfyldt, og $\Phi^{(k)}$ må i så fald være kompleks. Det eftervises nu, at (3-52) aldrig kan gælde, og (3-51) derfor må være opfyldt. Lad $\Phi^{(k)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, hvor \mathbf{a} og \mathbf{b} er reelle vektorer. Herved

$$\begin{aligned} (\Phi^{(k)*})^T \mathbf{M} \Phi^{(k)} &= (\mathbf{a} - i\mathbf{b})^T \mathbf{M} (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \mathbf{M} \mathbf{b} + i(\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \mathbf{M} \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \mathbf{M} \mathbf{b} > 0 \end{aligned} \quad (3-53)$$

Imaginærdelen i det næstsidste udsagn forsvinder, idet $\mathbf{b}^T \mathbf{M} \mathbf{a} = (\mathbf{b}^T \mathbf{M} \mathbf{a})^T = \mathbf{a}^T \mathbf{M}^T \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{b}$. Det sidste udsagn af (3-53) følger, fordi \mathbf{M} er positiv definit.

Når ω_k^2 er reel, bliver koefficientmatricen i (3-43) reel. Herved må også løsningen $\Phi^{(k)}$ være reel.

Hvis \mathbf{K} er positiv definit, mens \mathbf{M} ingen definitegenskaber opfylder, omskrives (3-45) på formen $\lambda_k \mathbf{K} \Phi^{(k)} = \mathbf{M} \Phi^{(k)}$, $\lambda_k = 1/\omega_k^2$. Man viser derefter på samme måde, at λ_k og dermed ω_k^2 er reel. Dette slutter beviset for sætningen.

Sætning 3-2: Hvis \mathbf{M} og \mathbf{K} begge er symmetriske og positiv definite matricer, er samtlige egenverdier positive.

Bevis:

Af (3-45) følger

$$\omega_k^2 = \frac{\Phi^{(k)T} \mathbf{K} \Phi^{(k)}}{\Phi^{(k)T} \mathbf{M} \Phi^{(k)}} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3-54)$$

Såvel tæller som nævner på højresiden af (3-54) er positive som følge af, at \mathbf{K} og \mathbf{M} er positiv definit. Heraf følger $\omega_k^2 > 0$.

Når $\omega_k^2 > 0$ følger, at ω_k bliver reel. Idet $\Phi^{(k)}$ er en reel vektor, kan (3-42) skrives

$$\mathbf{x}(t) = \Phi^{(k)} \cos \omega_k t, \quad k = 1, \dots, n \quad (3-55)$$

(3-55) repræsenterer en harmonisk bevægelse, hvor samtlige komponenter er i fase, jf. (1-1).

Bevægelsen (3-55) betegnes *den k. udæmpede egensvingningsbevægelse*, og ω_k er *den k. udæmpede cykliske egenfrekvens*. I det følgende antages egensvingningerne ordnet efter voksende cykliske egenfrekvenser, $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$, med mindre andet anføres.

Egenværdiproblemet kan alternativt formuleres ved hjælp af deformationsmatricen. Ganges (3-43) foran med $\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1}$ fremkommer egenværdiproblemet

$$(\mathbf{DM} - \lambda \mathbf{E})\Phi = \mathbf{0}, \quad \lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (3-56)$$

(3-43) og (3-56) bestemmer samme cykliske egenfrekvenser ω_k og egensvingningsformer $\Phi^{(k)}$.

Hvis $\Phi^{(k)}$ er en løsning til (3-43) eller (3-56), er også $c\Phi^{(k)}$ en løsning, hvor c er en arbitrær konstant. Egensvingningsformerne er således bestemt på nær en vilkårlig faktor. En vilkårlig af komponenterne i $\Phi^{(k)}$ kan herved vælges lig 1, hvorefter de øvrige $n - 1$ komponenter bestemmes ved at udvælge vilkårlige $n - 1$ ligninger med rangen $n - 1$ af (3-43) eller (3-56).

Eksempel 3-5: Egensvingninger af 2-frihedsgraders system

Cykliske egenfrekvenser og egensvingningsformer ønskes bestemt for det i eksempel 3-4 definerede system.

Ved (3-40) kan (3-43) skrives

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-57)$$

Den karakteristiske ligning (3-44) bliver

$$m_1 m_2 \omega^4 - \left(m_1 (k_2 + k_3) + m_2 (k_1 + k_2) \right) \omega^2 + k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 = 0 \Rightarrow$$

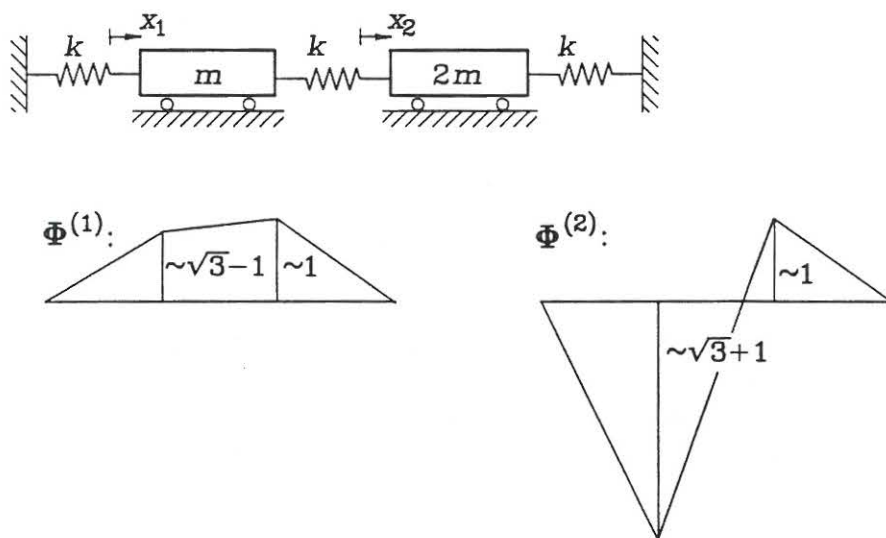
$$\left. \begin{matrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} \mp \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} - \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right)^2 + 4 \frac{k_2^2}{m_1 m_2}} \right) \quad (3-58)$$

Når $\omega^2 = \omega_1^2$ eller $\omega^2 = \omega_2^2$ indsættes i (3-57), kan de tilsvarende egensvingningsformer $\Phi^{(1)}$ og $\Phi^{(2)}$ bestemmes. Sættes koordinaten $\Phi_2^{(i)} = 1$, giver (3-57) herved følgende ligninger til bestemmelse af koordinaten $\Phi_1^{(i)}$

$$\left. \begin{aligned} (k_1 + k_2 - \omega_i^2 m_1) \Phi_1^{(i)} - k_2 \cdot 1 &= 0 \\ -k_2 \Phi_1^{(i)} + (k_2 + k_3 - \omega_i^2 m_2) \cdot 1 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, 2 \quad (3-59)$$

Man viser let, at begge ligninger (3-59) bestemmer samme værdi $\Phi_1^{(i)}$, når (3-58) er opfyldt. Herved findes egensvingningsformerne

$$\Phi^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{k_1 + k_2 - \omega_i^2 m_1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (3-60)$$



Figur 3-5: Egensvingningsformer for dataeksempel.

Lad specielt $k_1 = k_2 = k_3 = k$, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$. (3-58) giver

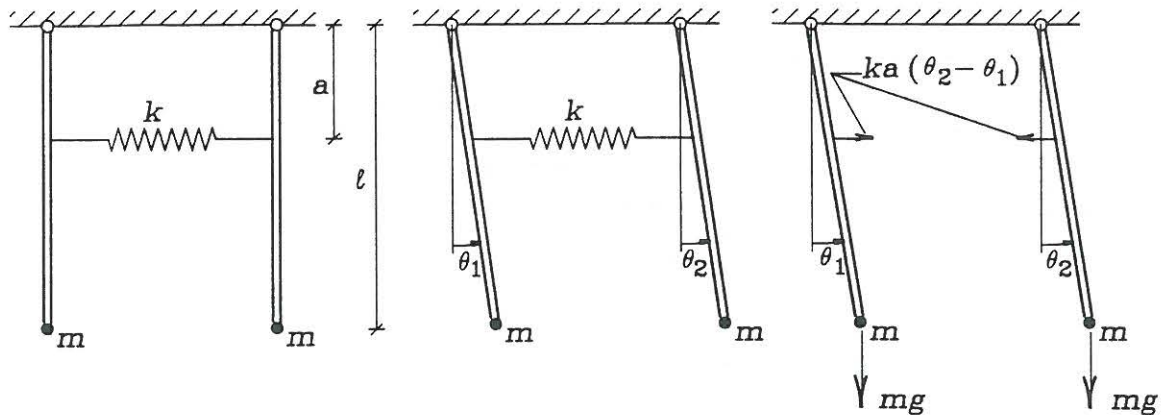
$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{k}{m} \\ \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{k}{m} \end{aligned} \right. \quad (3-61)$$

Af (3-60) findes

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(1)} &= \begin{bmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Phi^{(2)} &= \begin{bmatrix} -(\sqrt{3}+1) \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3-62)$$

Egensvingningsformerne (3-62) er skitseret i figur 3-5.

Eksempel 3-6: Egensvingninger af matematisk dobbeltpendul



Figur 3-6: Egensvingninger af matematisk dobbeltpendul.

2 matematiske penduler er koblet vha. en svag fjeder k , der er udeformeret, når pendulerne begge er i lodret position. Positionen af pendulerne fastlægges ved vinklerne θ_1 og θ_2 , der regnes positiv mod uret.

Pendulerne skæres fri ved fjederen, og den indre fjederkraft $ka(\theta_2 - \theta_1)$ påføres som ydre kraft.

Impulsmomentsætningen anvendes på de fritskårne penduler, idet momenter tages omkring understøtningsskæret. Reaktionen i understøtningsskæret går herved ud af ligningerne. Idet der forudsættes små svingninger om ligevægtstilstanden, bliver bevægelsesligningerne

$$\left. \begin{aligned} ml^2 \ddot{\theta}_1 &= -mgl\theta_1 + ka^2(\theta_2 - \theta_1) \\ ml^2 \ddot{\theta}_2 &= -mgl\theta_2 - ka^2(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \right\} \quad (3-63)$$

Det erindres, at momenterne af de ydre kræfter regnes positiv i samme retning som frihedsgraderne θ_1 og θ_2 . På matrixform antager (3-63) formen

$$\begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgl + ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & mgl + ka^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-64)$$

(3-64) er af samme type som (3-57). Resultater opnået i forbindelse med (3-57) kan derfor direkte overføres ved at sætte

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= mgl, \quad k_2 = ka^2, \quad k_3 = mgl \\ m_1 &= ml^2, \quad m_2 = ml^2 \end{aligned} \right\} \quad (3-65)$$

Cykliske egenfrekvenser bliver ved (3-58)

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} \frac{g}{l} \\ \frac{g}{l} + 2 \frac{k}{m} \frac{a^2}{l^2} \end{aligned} \right. \quad (3-66)$$

Egensvingsformer bliver ved (3-60)

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(1)} &= \begin{bmatrix} \frac{ka^2}{mgl + ka^2 - \frac{g}{l} ml^2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Phi^{(2)} &= \begin{bmatrix} \frac{ka^2}{mgl + ka^2 - (\frac{g}{l} + 2 \frac{k}{m} \frac{a^2}{l^2}) ml^2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3-67)$$

$\Phi^{(1)}$ svarer til, at pendulerne bevæger sig i fase, således at fjederen er udeformeret. $\Phi^{(2)}$ svarer til at pendulerne bevæger sig i modfase. Fjederen deformeres svarende til en knude i midtpunktet. Følgelig er $\omega_2 > \omega_1$.

Ved (3-55) bestemmes n lineært uafhængige løsninger $\mathbf{x}(t) = \Phi^{(k)} \cos \omega_k t$, $k = 1, \dots, n$, til den homogene differentiaalligning (3-41). Man efterviser let, at $\mathbf{x}(t) = \Phi^{(k)} \sin \omega_k t$, $k = 1, \dots, n$ repræsenterer yderligere n lineært uafhængige løsninger til (3-41). Den fuldstændige løsning til den homogene differentiaalligning (3-41) kan dermed skrives som en linearkombination af de herved bestemte $2n$ lineært uafhængige løsninger

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = & a_1 \Phi^{(1)} \cos \omega_1 t + \dots + a_n \Phi^{(n)} \cos \omega_n t \\ & + b_1 \Phi^{(1)} \sin \omega_1 t + \dots + b_n \Phi^{(n)} \sin \omega_n t \end{aligned} \quad (3-68)$$

Løsningen til begyndelsesværdiproblemet (3-41) er da givet ved (3-68), når koefficienterne $\mathbf{a}^T = [a_1, \dots, a_n]$ og $\mathbf{b}^T = [b_1, \dots, b_n]$ vælges, så begyndelsesbetingelserne opfyldes. For $t = 0$ findes

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= a_1 \Phi^{(1)} + \dots + a_n \Phi^{(n)} \\ \dot{\mathbf{x}}_0 &= b_1 \omega_1 \Phi^{(1)} + \dots + b_n \omega_n \Phi^{(n)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (3-69)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (3-70)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{O}^{-1} \mathbf{P}^{-1} \dot{\mathbf{x}}_0 \quad (3-71)$$

hvor

$$\mathbf{P} = [\Phi^{(1)} \dots \Phi^{(n)}] \quad (3-72)$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{bmatrix} \quad (3-73)$$

\mathbf{P} betegnes *modalmatricen*. Søjlerne i denne udgøres af komponenterne i eigensvingsformerne. Da disse er lineært uafhængige, eksisterer \mathbf{P}^{-1} .

Eksempel 3-7: Eigensvingninger af 2-frihedsgraderssystem

Eigensvingningen af det i figur 3-5 definerede system ønskes bestemt for begyndelsesbetingelserne

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-74)$$

Modalmatricen \mathbf{P} følger af (3-62) og (3-72)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}-1 & -(\sqrt{3}+1) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} \quad (3-75)$$

Af (3-70), (3-71), (3-74) følger heraf

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} A, \quad \begin{bmatrix} \omega_1 b_1 \\ \omega_2 b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-76)$$

Ved indsætning af (3-76) i (3-68) findes den søgte bevægelse

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \frac{A\sqrt{3}}{6} \left(\begin{bmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos \omega_1 t + \begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos \omega_2 t \right), \quad t \geq 0 \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned} \right\} \quad (3-77)$$

Eksempel 3-8: Egensvingninger af dobbeltpendul

Egensvingningen af det i eksempel 3-6 definerede system ønskes bestemt for begyndelsesbetingelserne.

$$\begin{bmatrix} \theta_1(0) \\ \theta_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1(0) \\ \dot{\theta}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-78)$$

Modalmatricen \mathbf{P} følger af (3-67)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-79)$$

Af (3-70), (3-71), (3-78) følger herved

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{A}{2}, \quad \begin{bmatrix} \omega_1 b_1 \\ \omega_2 b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-80)$$

Ved indsætning af (3-80) i (3-68) findes den søgte bevægelse

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} &= \frac{A}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos \omega_1 t + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos \omega_2 t \right), \quad t \geq 0 \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2 \frac{k}{m} \frac{a^2}{l^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3-81)$$

(3-81) kan skrives

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \\ -A \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0 \quad (3-82)$$

Når fjederen mellem pendulerne er tilstrækkelig slap, eller $a \ll l$, gælder

$$2 \frac{k}{m} \frac{a^2}{l^2} \ll \frac{g}{l} \quad (3-83)$$

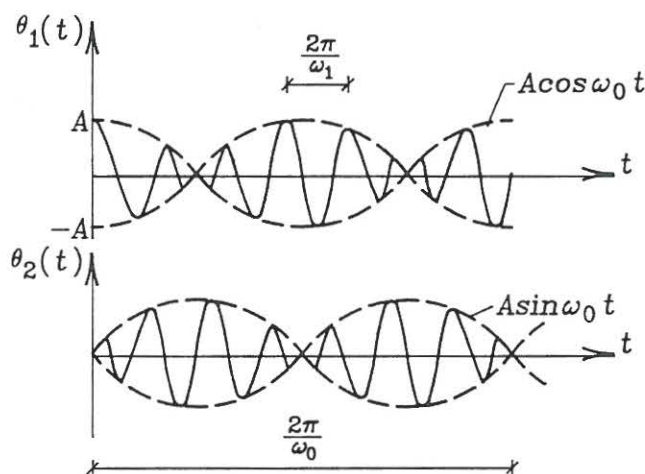
Når (3-83) er opfyldt, gælder

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{1 + 2 \frac{k}{m} \frac{a^2}{l^2} \frac{l}{g}} \simeq \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 + \frac{k}{m} \frac{a^2}{l^2} \frac{l}{g}\right) = \omega_1 + 2\omega_0 \quad (3-84)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \frac{k}{m} \frac{a^2}{\sqrt{l^3 g}} \quad (3-85)$$

Der er her benyttet $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}$, $|x| \ll 1$. Herved kan (3-82) skrives

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} A \cos \omega_0 t \cos \omega_1 t \\ A \sin \omega_0 t \sin \omega_1 t \end{bmatrix} \quad (3-86)$$



Figur 3-7: Amplitudemodulerede svingninger af matematisk dobbeltpendul.

Grafen for bevægelserne (3-86) er vist i figur 3-7. Gensvaret repræsenterer egensvingninger med den cykliske egenfrekvens ω_1 , i hvilken amplituden varierer harmonisk med en cyklisk frekvens $\omega_0 \ll \omega_1$. Fænomenet betegnes *amplitudemodulation* eller *beating*.

Systemet er konservativt, hvorfor der må ske en langsom overførsel af mekanisk energi fra et pendul til et andet i takt med amplituderne ændres.

Det bemærkes, at (3-86) kun approksimativt tilfredsstillende (3-64) som følge af den approksimative rækkeudvikling (3-84).

3.3 Tvungne harmoniske svingninger af n frihedsgraders systemer

Det antages, at den ydre kraft $\mathbf{f}(t)$ i (3-36) er harmonisk varierende, dvs.

$$\mathbf{f}(t) = \text{Re}(\mathbf{F}e^{i\omega t}) \quad (3-87)$$

På komponentform have

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \text{Re}(F_1 e^{i\omega t}) \\ \vdots \\ \text{Re}(F_n e^{i\omega t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}(|F_1| e^{-i\alpha_1} e^{i\omega t}) \\ \vdots \\ \text{Re}(|F_n| e^{-i\alpha_n} e^{i\omega t}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} |F_1| \cos(\omega t - \alpha_1) \\ \vdots \\ |F_n| \cos(\omega t - \alpha_n) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-88)$$

Faserne α_j er givet ved

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}(F_j) &= \text{Re}(|F_j| e^{-i\alpha_j}) = |F_j| \cos \alpha_j \\ \text{Im}(F_j) &= \text{Im}(|F_j| e^{-i\alpha_j}) = -|F_j| \sin \alpha_j \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\tan \alpha_j = -\frac{\text{Im}(F_j)}{\text{Re}(F_j)} \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad (3-89)$$

Herved kan (3-36), (3-37) skrives

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} &= \text{Re}(\mathbf{F}e^{i\omega t}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-90)$$

Den stationære løsning til (3-90) søges på formen

$$\mathbf{x}(t) = \text{Re}(\mathbf{X}e^{i\omega t}) \quad , \quad \mathbf{X} \in C^n \quad (3-91)$$

Ved indsætning af (3-91) i (3-90) findes ved argumentationen anført i forbindelse med (2-67)

$$\forall t \in R : \text{Re}\left(\left[(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{X} - \mathbf{F}\right]e^{i\omega t}\right) = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{F} \quad (3-92)$$

$$\mathbf{H}(\omega) = (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \quad (3-93)$$

(3-91) er en løsning til den inhomogene differentialligning (3-90), når den komplekse amplitudevektor \mathbf{X} er givet ved (3-92). $\mathbf{H}(\omega)$ betegnes *frekvensresponsmatricen*. Denne afhænger åbenbart af det strukturelle system, specificeret ved matricerne \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} . Belastningen indgår derimod kun ved den cykliske frekvens ω .

Antag

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_j \quad (3-94)$$

$$\mathbf{e}_j^T = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (3-95)$$

1 tallet i vektoren \mathbf{e}_j forekommer ved den j . komponent. Alle øvrige komponenter er lig 0.

Amplitudegensvaret $\mathbf{X} = \mathbf{H}_j$ fra (3-95) udgør iht. (3-92) den j . søjle i $\mathbf{H}(\omega)$.

Dernæst antages den ydre belastning at være periodisk med perioden T , dvs.

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t + T) \quad (3-96)$$

For hver komponent $f_j(t)$ gælder dernæst en Fourierrække af typen (2-99). Følgelig kan $\mathbf{f}(t)$ skrives

$$\mathbf{f}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{a}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \text{Re}(\mathbf{F}_m e^{i\omega_m t}) \quad (3-97)$$

$$\omega_m = m \frac{2\pi}{T}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3-98)$$

\mathbf{a}_0 og \mathbf{F}_m er vektorer af Fourierkoefficienterne a_0 , F_m i (2-99) for hver af belastningskomponenterne $f_i(t)$.

Den stationære bevægelse fra belastningen (3-97) bestemmes ved superposition af den stationære bevægelse fra hver af de harmoniske komponenter. Ved (3-92), (3-93) findes

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \text{Re}(\mathbf{X}_m e^{i\omega_m t}) \quad (3-99)$$

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{H}(\omega_m) \mathbf{F}_m \quad (3-100)$$

De partikulære integraler (3-91), (3-99) betegnes $\mathbf{x}^{(1)}(t)$. Den fuldstændige løsning til (3-36), der opfylder (3-37) kan da skrives

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(0)}(t) + \mathbf{x}^{(1)}(t) \quad (3-101)$$

$\mathbf{x}^{(0)}(t)$ er her løsningen til den homogene differentialligning, der tilfredsstiller begyndelsesbetingelserne.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^{(0)}(0) &= \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^{(1)}(0) \\ \dot{\mathbf{x}}^{(0)}(0) &= \dot{\mathbf{x}}_0 - \dot{\mathbf{x}}^{(1)}(0) \end{aligned} \right\} \quad (3-102)$$

For den partikulære løsning (3-91) gælder

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)}(0) &= \operatorname{Re}(\mathbf{X}) = \operatorname{Re}(\mathbf{H}(\omega)\mathbf{F}) \\ \dot{\mathbf{x}}^{(1)}(0) &= \operatorname{Re}(i\omega\mathbf{X}) = \operatorname{Re}(i\omega\mathbf{H}(\omega)\mathbf{F}) \end{aligned} \right\} \quad (3-103)$$

For løsningen (3-99) gælder

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)}(0) &= \frac{1}{2}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(\mathbf{H}(\omega_n)\mathbf{F}_n) \\ \dot{\mathbf{x}}^{(1)}(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(i\omega_n\mathbf{H}(\omega_n)\mathbf{F}_n) \end{aligned} \right\} \quad (3-104)$$

Løsningen $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ til den homogene differentialligning for givne begyndelsesbetingelser beskriver dæmpede egensvingninger af et system af n frihedsgrader. Fastlæggelsen af disse beskrives i det følgende afsnit 3.4.

Eksempel 3-9: Harmonisk gensvar af 2-frihedsgraders system

Systemet i eksempel 3-4 påvirkes af den harmonisk varierende ydre belastningsvektor

$$\mathbf{f}(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{F}e^{i\omega t}) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(F_1 e^{i\omega t}) \\ \operatorname{Re}(F_2 e^{i\omega t}) \end{bmatrix} \quad (3-105)$$

Den stationære harmoniske bevægelse bliver

$$\mathbf{x}(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{X}e^{i\omega t}) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(X_1 e^{i\omega t}) \\ \operatorname{Re}(X_2 e^{i\omega t}) \end{bmatrix} \quad (3-106)$$

\mathbf{X} bestemmes af \mathbf{F} ved (3-92). Frekvensresponsmatricen $\mathbf{H}(\omega)$ bliver ved (3-40), (3-93)

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_2) & -k_2 - i\omega c_2 \\ -k_2 - i\omega c_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 + i\omega(c_2 + c_3) \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\frac{1}{D} \cdot \begin{bmatrix} k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 + i\omega(c_2 + c_3) & k_2 + i\omega c_2 \\ k_2 + i\omega c_2 & k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_2) \end{bmatrix} \quad (3-107)$$

$$\begin{aligned} D &= \det(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \\ &= (k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_2)) (k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 + i\omega(c_2 + c_3)) - (k_2 + i\omega c_2)^2 \end{aligned} \quad (3-108)$$

3.4 Tvungne svingninger af systemer af n frihedsgrader som følge af arbitrær påvirkning

Betragt et lineært viskos dæmpet system af n frihedsgrader, der befinder sig i hvile til tiden $t = 0^-$. Til tiden $t = 0$ påføres en enhedsimpuls i den j . frihedsgrad, mens de øvrige frihedsgrader antages ubelastede. Bevægelsen som følge heraf betegnes $\mathbf{h}_j(t)$. I henhold til (3-36) bestemmes $\mathbf{h}_j(t)$ af differentialligningen

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}_j + \mathbf{C}\dot{\mathbf{h}}_j + \mathbf{K}\mathbf{h}_j = \mathbf{e}_j\delta(t) \quad (3-109)$$

Vektoren \mathbf{e}_j er givet ved (3-95).

Enhedsimpulser påføres på skift i alle n frihedsgrader, hvorved n løsningsvektorer $\mathbf{h}_1(t)$, \dots , $\mathbf{h}_n(t)$ opnås. Komponenterne i disse organiseres søjlevis i en matrix $\mathbf{h}(t)$, der betegnes *impulsresponsmatricen*, i.e.

$$\mathbf{h}(t) = [\mathbf{h}_1(t) \mathbf{h}_2(t) \cdots \mathbf{h}_n(t)] \quad (3-110)$$

Mængden af differentialligninger (3-109) kan herved samles i følgende matrixdifferentielligningssystem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{h}} + \mathbf{K}\mathbf{h} = \mathbf{E}\delta(t) \quad (3-111)$$

\mathbf{E} er enhedsmatricen. Søjlevektorerne på højresiden af (3-111) er dermed identisk med højresiden af (3-109).

Da systemet er i hvile, før påvirkningen påføres, er

$$\mathbf{h}(0^-) = \dot{\mathbf{h}}(0^-) = \mathbf{0} \quad (3-112)$$

Ved impulsbelastninger gælder som for 1 frihedsgraders systemer, at flytninger er kontinuerte, mens hastigheder er diskontinuerte. Heraf

$$\mathbf{h}(0^+) = \mathbf{0} \quad (3-113)$$

(3-111) integreres fra $t = 0^-$ til $t = 0^+$. Ved (3-112) og (3-113) findes

$$\mathbf{M} \int_{0^-}^{0^+} \ddot{\mathbf{h}}(t) dt + \mathbf{C} \int_{0^-}^{0^+} \dot{\mathbf{h}}(t) dt + \mathbf{K} \int_{0^-}^{0^+} \mathbf{h}(t) dt = \mathbf{E} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt \Rightarrow$$

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{h}}(0^+) - \dot{\mathbf{h}}(0^-)) + \mathbf{C}(\mathbf{h}(0^+) - \mathbf{h}(0^-)) = \mathbf{E} \Rightarrow$$

$$\dot{\mathbf{h}}(0^+) = \mathbf{M}^{-1} \quad (3-114)$$

Af (3-111), (3-113), (3-114) følger, at impulsresponsmatricen kan bestemmes som løsning til begyndelsesværdiproblemet

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{h}} + \mathbf{K}\mathbf{h} &= \mathbf{0}, \quad t > 0 \\ \mathbf{h}(0^+) &= \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{h}}(0^+) = \mathbf{M}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (3-115)$$

Af (3-115) følger, at søjlevektorerne $\mathbf{h}_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ i $\mathbf{h}(t)$ repræsenterer n lineært uafhængige løsningsvektorer til det dæmpede egensvingningsproblem.

Af (3-115) følger

$$\ddot{\mathbf{h}}(0^+) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1} \quad (3-116)$$

Af (3-114), (3-116) og ved differentiation af (3-115) findes følgende begyndelsesværdiproblem til bestemmelse af $\dot{\mathbf{h}}(t)$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M} \frac{d^2}{dt^2} \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{C} \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{K} \dot{\mathbf{h}} &= \mathbf{0}, \quad t > 0 \\ \dot{\mathbf{h}}(0^+) &= \mathbf{M}^{-1}, \quad \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{h}}(0^+) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (3-117)$$

Af (3-117) følger, at søjlevektorerne $\dot{\mathbf{h}}_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ i $\dot{\mathbf{h}}(t)$ repræsenterer yderligere n lineært uafhængige løsningsvektorer til det dæmpede egensvingningsproblem.

Betragt størrelsen

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t-\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau \quad (3-118)$$

Ved differentiation af (3-118), og anvendelse af (3-113), (3-114) findes

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)}(t) = \mathbf{h}(t-t) \mathbf{f}(t) + \int_0^t \dot{\mathbf{h}}(t-\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau = \int_0^t \dot{\mathbf{h}}(t-\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau \quad (3-119)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}^{(1)}(t) = \dot{\mathbf{h}}(t-t)\mathbf{f}(t) + \int_0^t \ddot{\mathbf{h}}(t-\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau =$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) + \int_0^t \ddot{\mathbf{h}}(t-\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (3-120)$$

Af (3-118), (3-119), (3-120) findes

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}^{(1)} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}^{(1)} + \mathbf{K}\mathbf{x}^{(1)} =$$

$$\mathbf{f}(t) + \int_0^t [\mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}(t-\tau) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{h}}(t-\tau) + \mathbf{K}\mathbf{h}(t-\tau)]\mathbf{f}(\tau)d\tau, \quad t > 0 \quad (3-121)$$

Det følger af (3-115), at leddet i den skarpkantede parentes i integranden på højresiden af (3-121) er lig 0. Følgelig haves

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}^{(1)} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}^{(1)} + \mathbf{K}\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{f}(t), \quad t > 0 \quad (3-122)$$

(3-122) viser, at $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ er et partikulært integral til (3-36). Af (3-118) og (3-119) følger, at det partikulære integral tilfredsstiller begyndelsesbetingelserne

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \dot{\mathbf{x}}^{(1)}(0) = \mathbf{0} \quad (3-123)$$

Den fuldstændige løsning til (3-36) kan skrives

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(0)}(t) + \mathbf{x}^{(1)}(t), \quad t > 0 \quad (3-124)$$

$\mathbf{x}^{(0)}(t)$ angiver den transiente del af bevægelsen, der bestemmes som løsning til den homogene differentiaalligning (3-36). Af (3-37), (3-123), (3-124) følger, at den søgte transiente bevægelse skal tilfredsstille begyndelsesbetingelserne

$$\mathbf{x}^{(0)}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}^{(0)}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0 \quad (3-125)$$

Det følger heraf, at $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ beskriver den dæmpede egensvingningsbevægelse fra begyndelsesbetingelserne $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$.

Ovenfor er bestemt $2n$ lineært uafhængige løsninger $\mathbf{h}_j(t)$, $\dot{\mathbf{h}}_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ til den homogene differentiaalligning (3-36). Heraf følger, at enhver løsning til den homogene differentiaalligning (3-36) kan skrives som en linearkombination af $\mathbf{h}_j(t)$, $\dot{\mathbf{h}}_j(t)$, $j = 1, \dots, n$. Specielt for $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ haves

$$\mathbf{x}^{(0)}(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{h}_j(t)a_j + \sum_{j=1}^n \dot{\mathbf{h}}_j(t)b_j \quad (3-126)$$

På matrixform kan (3-126) skrives

$$\mathbf{x}^{(0)}(t) = \mathbf{h}(t)\mathbf{a} + \dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{b} \quad (3-127)$$

$$\mathbf{a}^T = [a_1, \dots, a_n], \quad \mathbf{b}^T = [b_1, \dots, b_n] \quad (3-128)$$

Ved differentiation af (3-127) findes

$$\dot{\mathbf{x}}^{(0)}(t) = \dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{a} + \ddot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{b} \quad (3-129)$$

Udviklingskonstanterne \mathbf{a} , \mathbf{b} bestemmes ved indsætning af begyndelsesbetingelserne (3-113), (3-114), (3-116), (3-125) i (3-127), (3-129)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \mathbf{0}\mathbf{a} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{a} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{C}\mathbf{x}_0 + \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{b} &= \mathbf{M}\mathbf{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-130)$$

Ved indsætning af (3-130) i (3-127) findes herved

$$\mathbf{x}^{(0)}(t) = (\dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{M} + \mathbf{h}(t)\mathbf{C})\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}(t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}_0 \quad (3-131)$$

Ved indsætning af (3-118) og (3-131) i (3-124) findes løsningen til (3-36), (3-37) på formen

$$\mathbf{x}(t) = (\dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{M} + \mathbf{h}(t)\mathbf{C})\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}(t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}_0 + \int_0^t \mathbf{h}(t-\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (3-132)$$

Den dæmpede egensvingningsbevægelse, der tilfredsstiller begyndelsesbetingelserne (3-37), findes specielt for $\mathbf{f}(\tau) \equiv \mathbf{0}$

$$\mathbf{x}(t) = (\dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{M} + \mathbf{h}(t)\mathbf{C})\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}(t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}_0 \quad (3-133)$$

Såvel bevægelsen ved tvungne svingninger som egensvingningsbevægelsen af et lineært viskøst dæmpet system er herved bestemt, hvis impulsresponsmatricen $\mathbf{h}(t)$ kendes. Lineær svingningsteori for systemer af n frihedsgrader har i princippet til formål at bestemme denne.

(3-111) ganges med $e^{-i\omega t}$ på begge sider af lighedstegnet, efterfulgt af en integration over intervallet $]-\infty, \infty[$. Af betingelserne $\mathbf{h}(-\infty) = \dot{\mathbf{h}}(-\infty) = \mathbf{h}(\infty) = \dot{\mathbf{h}}(\infty) = \mathbf{0}$ findes ved delvis integration

$$\mathbf{M} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\mathbf{h}}(t)e^{-i\omega t}dt + \mathbf{C} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{h}}(t)e^{-i\omega t}dt + \mathbf{K} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t)e^{-i\omega t}dt =$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt &\Rightarrow \\
(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t) e^{-i\omega t} dt &= \mathbf{E} \Rightarrow \\
\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t) e^{-i\omega t} dt &= (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}
\end{aligned} \tag{3-134}$$

Ved integraler af typen $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t) e^{-i\omega t} dt$ forstås matricen, der dannes af Fouriertransformationen af hver af $n \times n$ komponenter i $\mathbf{h}(t)$.

Af (3-93) og (3-134) følger

$$\mathbf{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} \mathbf{h}(t) e^{-i\omega t} dt \tag{3-135}$$

Af (3-135) og (A-14) følger, at $\mathbf{H}(\omega)$ er den Fouriertransformerede af $\mathbf{h}(t)$. Ved (A-13) findes herved

$$\mathbf{h}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad t > 0 \tag{3-136}$$

I princippet er problemet herved løst. Man starter med at beregne $\mathbf{H}(\omega)$ af (3-93). $\mathbf{h}(t)$ beregnes dernæst af (3-136). I praksis er metoden dog sædvanligvis uigennemførlig såvel numerisk som analytisk. I stedet angives i afsnit 3.6 og afsnit 3.7 analytiske bestemmelser af $\mathbf{h}(t)$, gyldig for en stor klasse af konstruktioner.

3.5 Ortogonalitetssegenskaber for udæmpede egensvingningsformer

Sætning 3-3: Egensvingningsformer $\Phi^{(i)}$ og $\Phi^{(j)}$ hørende til forskellige egenverdier ω_i^2 og ω_j^2 opfylder ortogonalitetsbetingelserne

$$\Phi^{(i)T} \mathbf{M} \Phi^{(j)} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ M_i & , \quad i = j \end{cases} \tag{3-137}$$

$$\Phi^{(i)T} \mathbf{K} \Phi^{(j)} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ \omega_i^2 M_i & , \quad i = j \end{cases} \tag{3-138}$$

M_i er den udæmpede modalmasse i den i . egensvingning defineret ved

$$M_i = \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \Phi^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n \tag{3-139}$$

Bevis:

Udgangspunktet tages igen i (3-43). Denne opskrives for den i . og j . egensvingning

$$\mathbf{K}\Phi^{(i)} = \omega_i^2 \mathbf{M}\Phi^{(i)} \quad (3-140)$$

$$\mathbf{K}\Phi^{(j)} = \omega_j^2 \mathbf{M}\Phi^{(j)} \quad (3-141)$$

(3-140) ganges foran med $\Phi^{(j)T}$, og (3-141) ganges foran med $\Phi^{(i)T}$. Herved

$$\Phi^{(j)T} \mathbf{K} \Phi^{(i)} = \omega_i^2 \Phi^{(j)T} \mathbf{M} \Phi^{(i)} \quad (3-142)$$

$$\Phi^{(i)T} \mathbf{K} \Phi^{(j)} = \omega_j^2 \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \Phi^{(j)} \quad (3-143)$$

(3-142) transponeres. Ved udnyttelse af symmetriegenskaberne $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$, $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$ findes

$$\Phi^{(i)T} \mathbf{K}^T \Phi^{(j)} = \omega_i^2 \Phi^{(i)T} \mathbf{M}^T \Phi^{(j)} \Rightarrow$$

$$\Phi^{(i)T} \mathbf{K} \Phi^{(j)} = \omega_i^2 \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \Phi^{(j)} \quad (3-144)$$

Ved subtraktion af (3-143) fra (3-144) følger

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \Phi^{(j)} = 0 \quad (3-145)$$

Er $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$, følger (3-137) heraf. Men gælder (3-137), følger af (3-144), at også (3-138) gælder. Dette slutter beviset for sætningen.

Udover forudsætningen $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$ hænger beviset på symmetriegenskaberne af \mathbf{K} og \mathbf{M} . Symmetrien af \mathbf{K} er en følge af Maxwells sætning. Ligesom sætning 3-1 er sætning 3-3 derfor blot at betragte som et lemma til Maxwells sætning.

Når de cykliske egenfrekvenser er forskellige, siges egenverdierne ω_i^2 at være *simple*. Antag nu ω_i^2 er en *k-dobbelt rod* til den karakteristiske ligning (3-43), hvor $i + k - 1 \leq n$. $\Phi^{(i)}, \Phi^{(i+1)}, \dots, \Phi^{(i+k-1)}$ betegner de tilsvarende k lineært uafhængige egensvingningsformer knyttet til egenværdien ω_i^2 , der ikke nødvendigvis opfylder (3-137) og (3-138). I så fald gælder

Sætning 3-4: Enhver linearkombination af lineært uafhængige udæmpede egensvingningsformer hørende til samme egenverdi er selv en egensvingningsform hørende til egenværdien.

Bevis:

Betragt

$$\Psi^{(i)} = a_1 \Phi^{(i)} + a_2 \Phi^{(i+1)} + \dots + a_k \Phi^{(i+k-1)} \quad (3-146)$$

Påstanden følger herefter ved anvendelse af (3-43), idet

$$\begin{aligned} K\Psi^{(i)} &= a_1 K\Phi^{(i)} + a_2 K\Phi^{(i+1)} + \dots + a_k K\Phi^{(i+k-1)} = \\ &= a_1 \omega_i^2 M\Phi^{(i)} + a_2 \omega_i^2 M\Phi^{(i+1)} + \dots + a_k \omega_i^2 M\Phi^{(i+k-1)} = \omega_i^2 M\Psi^{(i)} \end{aligned} \quad (3-147)$$

Sætning 3-5: Det er altid muligt at vælge et system af egensvingningsformer, der opfylder ortogonalitetsbetingelserne (3-137), (3-138).

Bevis:

Når egenverdierne er simple, er sætningen identisk med sætning 3-3. Antag nu, at egenverdien ω_i^2 er en k -dobbel rod til den karakteristiske ligning med tilhørende udæmpede ikke-ortogonale egensvingningsformer $\Phi^{(i)}, \Phi^{(i+1)}, \dots, \Phi^{(i+k-1)}$. Betragt dernæst linearkombinationerne

$$\left. \begin{aligned} \Psi^{(i)} &= \Phi^{(i)} \\ \Psi^{(i+1)} &= \Phi^{(i)} + a_2^{(i+1)} \Phi^{(i+1)} \\ &\vdots \\ \Psi^{(i+k-1)} &= \Phi^{(i)} + a_2^{(i+k-1)} \Phi^{(i+1)} + \dots + a_k^{(i+k-1)} \Phi^{(i+k-1)} \end{aligned} \right\} \quad (3-148)$$

Efter sætning 3-4 er samtlige linearkombinationer i (3-148) egensvingningsformer med egenverdien ω_i^2 .

Af sætning 3-3 følger, at enhver linearkombination af typen (3-148) er ortogonal på enhver egensvingningsform $\Phi^{(j)}$, hvor $\omega_j^2 \neq \omega_i^2$. Det skal derfor blot eftervises, at egensvingningsformerne $\Psi^{(i)}, \Psi^{(i+1)}, \dots, \Psi^{(i+k-1)}$ kan vælges indbyrdes ortogonale i betydningen (3-137).

Koefficienterne $a_l^{(i+k-1)}$, $l = 2, \dots, k$ bestemmes trinvist, således at ortogonalitetsbetingelsen (3-137) overholdes. Eksempelvis bestemmes $a_2^{(i+1)}$ af betingelsen

$$\begin{aligned} \Psi^{(i)T} M \Psi^{(i+1)} &= 0 \Rightarrow \\ \Phi^{(i)T} M \Phi^{(i)} + a_2^{(i+1)} \Phi^{(i)T} M \Phi^{(i+1)} &= 0 \Rightarrow \\ a_2^{(i+1)} &= -\frac{\Phi^{(i)T} M \Phi^{(i)}}{\Phi^{(i)T} M \Phi^{(i+1)}} \end{aligned} \quad (3-149)$$

Den omtalte metode for valget af egensvingningsformerne $\Psi^{(i)}, \Psi^{(i+1)}, \dots, \Psi^{(i+k-1)}$ betegnes *Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetode*.

3.6 Udvikling i udæmpede egensvingningsformer

Løsningsvektoren $\mathbf{x}(t)$ til (3-36), (3-37) er en n -dimensional vektor. Til ethvert tidspunkt t kan $\mathbf{x}(t)$ skrives som en linearkombination af n lineært uafhængige basisvektorer. Som basisvektorer kan man specielt vælge de udæmpede egensvingningsformer $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(n)}$. Herved gives

$$\mathbf{x}(t) = q_1(t)\Phi^{(1)} + q_2(t)\Phi^{(2)} + \dots + q_n(t)\Phi^{(n)} \quad (3-150)$$

Koordinaterne $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ i den valgte basis i det n -dimensionale vektorrum betegnes *de udæmpede modalkoordinater*. Da $\mathbf{x}(t)$ ændrer sig med tiden, er det klart at også modalkoordinaterne må ændre sig i tiden. (3-150) kan opfattes som en lineær transformation fra frihedsgraderne $\mathbf{q}^T = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ til frihedsgraderne \mathbf{x} , der på matrixform lyder

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{q}(t) \quad (3-151)$$

Modalmatricen \mathbf{P} er givet ved (3-72).

Bevægelsesligningerne ønskes formuleret i modalkoordinaterne. Med henblik herpå indsættes (3-150) i (3-36), hvorefter ligningen ganges foran med $\Phi^{(i)T}$. Herved

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{M}\Phi^{(j)}\ddot{q}_j + \mathbf{C}\Phi^{(j)}\dot{q}_j + \mathbf{K}\Phi^{(j)}q_j) = \mathbf{f}(t) \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^n (\Phi^{(i)T}\mathbf{M}\Phi^{(j)}\ddot{q}_j + \Phi^{(i)T}\mathbf{C}\Phi^{(j)}\dot{q}_j + \Phi^{(i)T}\mathbf{K}\Phi^{(j)}q_j) = \Phi^{(i)T}\mathbf{f}(t) \Rightarrow$$

$$\ddot{q}_i + \frac{1}{M_i} \sum_{j=1}^n (\Phi^{(i)T}\mathbf{C}\Phi^{(j)}\dot{q}_j) + \omega_i^2 q_i = \frac{1}{M_i} F_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0 \quad (3-152)$$

$$F_i(t) = \Phi^{(i)T}\mathbf{f}(t) \quad (3-153)$$

I det sidste udsagn af (3-152) er ortogonalitetsbetingelserne (3-137) og (3-138) benyttet. Kun for $j = i$ bidrager til summationen. $F_i(t)$ betegnes *modalbelastningen i den i . egensvingning*.

For at løse (3-152) kræves kendskab til begyndelsesbetingelserne $q_i(0), \dot{q}_i(0)$ for modalkoordinaterne udtrykt ved begyndelsesbetingelserne for de oprindelige koordinater. Med

henblik herpå indsættes (3-150) i (3-37), hvorefter ligningerne ganges foran med $\Phi^{(i)T} \mathbf{M}$. Herved

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \sum_{j=1}^n \Phi^{(j)} q_j(0) \\ \dot{\mathbf{x}}_0 &= \sum_{j=1}^n \Phi^{(j)} \dot{q}_j(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \mathbf{x}_0 &= \sum_{j=1}^n \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \Phi^{(j)} q_j(0) \\ \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_0 &= \sum_{j=1}^n \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \Phi^{(j)} \dot{q}_j(0) \end{aligned} \right\} \quad (3-154)$$

Ved ortogonalitetsegenskaberne (3-137), (3-138) følger heraf

$$\left. \begin{aligned} q_{i0} = q_i(0) &= \frac{1}{M_i} \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \mathbf{x}_0 \\ \dot{q}_{i0} = \dot{q}_i(0) &= \frac{1}{M_i} \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_0 \end{aligned} \right\} , \quad i = 1, \dots, n \quad (3-155)$$

Af (3-151) følger, at begyndelsesbetingelserne for modalkoordinaterne alternativt er givet ved

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}(0) &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}(0) &= \mathbf{P}^{-1} \dot{\mathbf{x}}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-156)$$

Ved sammenligning af (3-155) og (3-156) findes følgende udtryk for den inverse modal-matrix

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{M_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{M_n} \end{bmatrix} \mathbf{P}^T \mathbf{M} \quad (3-157)$$

For lineært udæmpede egensvingninger er $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{0}$. Herved reduceres (3-152) til

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i &= 0 , \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0 \\ q_i(0) &= q_{i0} , \quad \dot{q}_i(0) = \dot{q}_{i0} \end{aligned} \right\} \quad (3-158)$$

(3-158) har løsningen, jf. (2-8)

$$q_i(t) = q_i(0) \cos \omega_i t + \frac{\dot{q}_i(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \geq 0 \quad (3-159)$$

Løsningen til egensvingningsproblemet fremkommer ved indsætning af (3-159) i (3-150)

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n \Phi^{(j)} \left(q_j(0) \cos \omega_j t + \frac{\dot{q}_j(0)}{\omega_j} \sin \omega_j t \right) \quad (3-160)$$

Ved indsætning af (3-156) ses (3-160) at være identisk med (3-68), (3-70), (3-71).

(3-152) skrives på formen

$$\ddot{q}_i + 2\omega_i \left(\zeta_i \dot{q}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sqrt{\frac{\omega_j M_j}{\omega_i M_i}} \zeta_{ij} \dot{q}_j \right) + \omega_i^2 q_i = \frac{1}{M_i} F_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0 \quad (3-161)$$

hvor

$$\zeta_i = \frac{\Phi^{(i)T} \mathbf{C} \Phi^{(i)}}{2\omega_i M_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-162)$$

$$\zeta_{ij} = \frac{\Phi^{(i)T} \mathbf{C} \Phi^{(j)}}{2\sqrt{\omega_i \omega_j M_i M_j}}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad j \neq i \quad (3-163)$$

(3-161) er ikke lettere at løse end det oprindelige differentialligningssystem med mindre koefficienterne $\zeta_{ij} = 0$. Herved dekobler differentialligningssystemet (3-161) til simple differentialligninger af 2. orden med konstante koefficienter, der bestemmer hver sin modalkoordinat. Betingelsen for dekopling er åbenbart

$$\Phi^{(i)T} \mathbf{C} \Phi^{(j)} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ 2\zeta_i \omega_i M_i & , \quad i = j \end{cases} \quad (3-164)$$

I henhold til (3-137), (3-138), (3-164) er egensvingningsformerne således i tilfælde af dekopling ortogonale vægtet med alle 3 systemmatricer \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} .

Af regnetekniske grunde ignoreres koblingsleddene i (3-161) ofte, selv når (3-164) ikke er opfyldt. Fejlen ved denne fremgangsmåde kan vurderes ved en perturbationsanalyse, som det vises senere i dette afsnit. Hvis (3-164) gælder, eller koblingsleddene ignoreres, haves

$$\ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{1}{M_i} F_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0 \quad (3-165)$$

ζ_i betegnes *dæmpningsforholdet i den i. egensvingning*.

Løsningen til (3-165), der opfylder begyndelsesbetingelserne (3-155) bliver, jf. (2-136)

$$q_i(t) = e^{-\zeta_i \omega_i t} \left(q_i(0) \cos \omega_{d,i} t + \frac{\dot{q}_i(0) + \zeta_i \omega_i q_i(0)}{\omega_{d,i}} \sin \omega_{d,i} t \right) + \int_0^t h_i(t-\tau) F_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-166)$$

$$\omega_{d,i} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (3-167)$$

$$h_i(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq 0 \\ \frac{1}{M_i \omega_{d,i}} e^{-\zeta_i \omega_i t} \sin \omega_{d,i} t & , \quad t > 0 \end{cases} \quad (3-168)$$

$\omega_{d,i}$ er den *i.* dæmpede cykliske egenfrekvens. $h_i(\cdot)$ betegnes *impulsresponsfunktionen* for den *i.* *egensvingning*. Det skal understreges, at disse begreber kun har mening for en konstruktion, hvor dekoblingsbetingelsen (3-164) er opfyldt.

Når (3-166) indsættes i (3-150) opnås den fuldstændige løsning til (3-36), (3-37). Ved indsætning af (3-153), (3-155) kan løsningen udtrykkes ved den oprindelige belastningsvektor $\mathbf{f}(t)$ og begyndelsesbetingelserne \mathbf{x}_0 og $\dot{\mathbf{x}}_0$. Resultatet bliver

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{x}}_0 + \int_0^t \mathbf{h}(t-\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (3-169)$$

$$\mathbf{A}(t) = \left[\sum_{j=1}^n (\dot{h}_j(t) + 2\zeta_j \omega_j h_j(t)) \Phi^{(j)} \Phi^{(j)T} \right] \mathbf{M} \quad (3-170)$$

$$\mathbf{B}(t) = \left[\sum_{j=1}^n h_j(t) \Phi^{(j)} \Phi^{(j)T} \right] \mathbf{M} \quad (3-171)$$

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{j=1}^n h_j(t) \Phi^{(j)} \Phi^{(j)T} \quad (3-172)$$

(3-172) angiver en analytisk løsning for impulsresponsmatricen, der er gyldig, når dekoblingsbetingelsen (3-164) er gældende.

Af (2-139), (3-135), (3-172) findes for frekvensresponsmatricen

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\omega) &= (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \\ &= \sum_{j=1}^n H_j(\omega) \Phi^{(j)} \Phi^{(j)T} \end{aligned} \quad (3-173)$$

$$H_j(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_j(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{M_j(\omega_j^2 - \omega^2 + 2\zeta_j\omega_j\omega_i)} \quad (3-174)$$

$H_j(\omega)$ betegnes *frekvensresponsfunktionen i den j. egensvingning*. Denne størrelsen er ligeledes kun meningsfuld, når dekoblingsbetingelsen (3-164) er opfyldt.

Sættes $\omega = 0$ i (3-173) og (3-174), findes følgende interessante rækkeudvikling for \mathbf{K}^{-1} , der betegnes *Mercers sætning*

$$\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{D} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\omega_j^2 M_j} \Phi^{(j)} \Phi^{(j)T} \quad (3-175)$$

Idet det antages, at dekoblingsbetingelsen (3-164) ikke er opfyldt, betragtes koefficienterne ζ_{ij} defineret ved (3-163).

Antag \mathbf{C} er symmetrisk, i.e. $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$. Af (3-163) følger da, at ζ_{ij} opfylder symmetribetingelsen

$$\zeta_{ij} = \zeta_{ji} \quad (3-176)$$

Betragt matricen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 2\omega_1 M_1 \zeta_1 & 2\sqrt{\omega_1 \omega_2 M_1 M_2} \zeta_{12} & \cdots & 2\sqrt{\omega_1 \omega_n M_1 M_n} \zeta_{1n} \\ 2\sqrt{\omega_2 \omega_1 M_2 M_1} \zeta_{21} & 2\omega_2 M_2 \zeta_2 & \cdots & 2\sqrt{\omega_2 \omega_n M_2 M_n} \zeta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2\sqrt{\omega_n \omega_1 M_n M_1} \zeta_{n1} & 2\sqrt{\omega_n \omega_2 M_n M_2} \zeta_{n2} & \cdots & 2\omega_n M_n \zeta_n \end{bmatrix} \\ &= [\Phi^{(1)} \Phi^{(2)} \dots \Phi^{(n)}]^T \mathbf{C} [\Phi^{(1)} \Phi^{(2)} \dots \Phi^{(n)}] = \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \end{aligned} \quad (3-177)$$

Antag systemet er dissipativt, svarende til at \mathbf{C} er positiv definit. Da modalmatricen er ikke-singulær, fordi søjlevektorerne er lineært uafhængige, følger at også \mathbf{A} er positiv definit. Lad $\mathbf{x}^T = [0 \dots 0 \ x_i \ 0 \dots 0 \ x_j \ 0 \dots 0]$, hvor kun den i . og j . komponent er forskellig fra 0. Herved haves

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2\omega_i M_i \zeta_i & 2\sqrt{\omega_i \omega_j M_i M_j} \zeta_{ij} \\ 2\sqrt{\omega_j \omega_i M_j M_i} \zeta_{ji} & 2\omega_j M_j \zeta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} > 0 \quad (3-178)$$

Uligheden (3-178) skal opfyldes for vilkårlige $[x_i, x_j] \neq [0, 0]$, svarende til at koefficientmatricen af den kvadratiske form på højresiden af (3-178) er positiv definit. Da $\zeta_i > 0 \wedge \zeta_j > 0$ er dette tilfældet, hvis og kun hvis determinanten er positiv. Dette fører til betingelsen

$$\zeta_{ij} \zeta_{ji} < \zeta_i \zeta_j \quad (3-179)$$

Er yderligere $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ opnået ved (3-176) og (3-179) følgende ulighed for dissipative symmetriske dæmpningsmatricer

$$|\zeta_{ij}| < \sqrt{\zeta_i \zeta_j} \quad (3-180)$$

Med henblik på at opnå en tilnærmet analytisk løsning, når dekoblingsbetingelsen (3-164) ikke er opfyldt, skrives (3-161) på formen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_i + 2\omega_i \left(\zeta_i \dot{q}_i + \zeta \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sqrt{\frac{\omega_j M_j}{\omega_i M_i}} \frac{\zeta_{ij}}{\zeta} \dot{q}_j + \omega_i^2 q_i \right) &= \frac{1}{M_i} F_i(t), \quad t > 0 \\ q_i(0) = q_{i0}, \quad \dot{q}_i(0) &= \dot{q}_{i0} \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-181)$$

$$\zeta = \max_{i,j=1,\dots,n} |\zeta_{ij}| \quad (3-182)$$

Systemet antages svagt dæmpet. Af (3-180) følger heraf

$$\zeta < \max_{i=1,\dots,n} \zeta_i \ll 1 \quad (3-183)$$

Under forudsætning af (3-183) kan en tilnærmet analytisk løsning opnås ved en *perturbationsanalyse*. Princippet i denne er, at løsningen $q_i(t)$ til (3-181) skrives som en potensrække i parameteren $\zeta \ll 1$, dvs.

$$q_i(t) = q_i^{(0)}(t) + \zeta q_i^{(1)}(t) + \zeta^2 q_i^{(2)}(t) + \dots, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-184)$$

Funktionerne $q_i^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \dots$ i (3-184) betegnes *k. ordensløsningerne*. Disse antages uafhængige af ζ . Som vist i det følgende bestemmes disse funktioner trinvist som løsning til samme lineære differentialligning med forskellige inhomogeniteter og begyndelsesbetingelser $q_i^{(k)}(0) = q_{i0}^{(k)}$, $\dot{q}_i^{(k)}(0) = \dot{q}_{i0}^{(k)}$.

Sættes $t = 0$ i (3-184) findes

$$\left. \begin{aligned} q_{i0} &= q_{i0}^{(0)} + \zeta q_{i0}^{(1)} + \zeta^2 q_{i0}^{(2)} + \dots \\ \dot{q}_{i0} &= \dot{q}_{i0}^{(0)} + \zeta \dot{q}_{i0}^{(1)} + \zeta^2 \dot{q}_{i0}^{(2)} + \dots \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-185)$$

(3-185) må være opfyldt for vilkårlig værdi af ζ . Heraf følger

$$\left. \begin{aligned} q_{i0}^{(0)} &= q_{i0}, \quad \dot{q}_{i0}^{(0)} = \dot{q}_{i0} \\ q_{i0}^{(k)} &= 0, \quad \dot{q}_{i0}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-186)$$

Indsættes løsningsantagelsen (3-185) i (3-181) og samles led med fælles faktor ζ^k , findes

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i^{(0)} + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i^{(0)} + \omega_i^2 q_i^{(0)} &= \frac{1}{M_i} F_i(t) \\ + \zeta \left[\ddot{q}_i^{(1)} + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i^{(1)} + \omega_i^2 q_i^{(1)} + 2\omega_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sqrt{\frac{\omega_j M_j}{\omega_i M_i}} \frac{\zeta_{ij}}{\zeta} \dot{q}_j^{(0)}(t) \right] \\ + \zeta^2 \left[\ddot{q}_i^{(2)} + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i^{(2)} + \omega_i^2 q_i^{(2)} + 2\omega_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sqrt{\frac{\omega_j M_j}{\omega_i M_i}} \frac{\zeta_{ij}}{\zeta} \dot{q}_j^{(1)}(t) \right] + \dots &= 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3-187)$$

Med samme begrundelse som ved udledelsen af randbetingelserne (3-186) må faktorerne i de skarpkantede parenteser af (3-187) være lig 0. I forbindelse med (3-186) opnås herved følgende differentialligningssystem til bestemmelse af $q_i^{(k)}(t)$ for $i = 1, \dots, n$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_i^{(0)} + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i^{(0)} + \omega_i^2 q_i^{(0)} &= \frac{1}{M_i} F_i(t), \quad t > 0 \\ q_i^{(0)}(0) = q_i(0), \quad \dot{q}_i^{(0)}(0) &= \dot{q}_i(0) \end{aligned} \right\} \quad (3-188a)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_i^{(1)} + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i^{(1)} + \omega_i^2 q_i^{(1)} &= -2\omega_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sqrt{\frac{\omega_j M_j}{\omega_i M_i}} \frac{\zeta_{ij}}{\zeta} \dot{q}_j^{(0)}(t), \quad t > 0 \\ q_i^{(1)}(0) = 0, \quad \dot{q}_i^{(1)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-188b)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_i^{(2)} + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i^{(2)} + \omega_i^2 q_i^{(2)} &= -2\omega_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sqrt{\frac{\omega_j M_j}{\omega_i M_i}} \frac{\zeta_{ij}}{\zeta} \dot{q}_j^{(1)}(t), \quad t > 0 \\ q_i^{(2)}(0) = 0, \quad \dot{q}_i^{(2)}(0) &= 0 \\ \vdots \end{aligned} \right\} \quad (3-188c)$$

(3-188a) er identisk med (3-165), hvorfor $q_i^{(0)}(t)$ er givet ved (3-166). 0. ordens løsningen svarer således til løsningen, hvor modalkoblingen ignoreres.

Den herved opnåede løsning for $q_i^{(0)}(t)$ indsættes på højresiden af (3-188b), der herved bliver en kendt funktion af tiden. Herved kan $q_i^{(1)}(t)$ bestemmes. Løsningen bliver åbenbart

$$q_i^{(1)}(t) = -2\omega_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sqrt{\frac{\omega_j M_j}{\omega_i M_i}} \frac{\zeta_{ij}}{\zeta} \int_0^t h_i(t-\tau) \dot{q}_j^{(0)}(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-189)$$

(3-189) kan dernæst indsættes på højresiden af (3-188c), der herved bliver en kendt funktion af tiden. Herved kan $q_i^{(2)}(t)$ bestemmes. Processen kan fortsættes ubegrænset. k . ordens løsningen bliver

$$q_i^{(k)}(t) = -2\omega_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sqrt{\frac{\omega_j M_j}{\omega_i M_i}} \frac{\zeta_{ij}}{\zeta} \int_0^t h_i(t-\tau) \dot{q}_j^{(k-1)}(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3-190)$$

Hvis $f(t)$ i (3-153), og dermed samtlige modalbelastninger $F_j(t)$, indeholder en harmonisk komponent med den cykliske egenfrekvens ω_j , vil $q_j^{(0)}(t)$ bestemt ved (3-188a) resonanspåvirkes, mens dette ikke er tilfældet for $q_i^{(0)}(t)$, $i \neq j$. Dermed bliver $q_i^{(1)}(t)$ relativt stor, fordi bidraget $q_j^{(0)}(\tau)$ i summationen på højresiden af (3-189) er stor. I dette tilfælde kan det andet led på højresiden af (3-184) blive sammenlignelig med det første led for ikke-resonanspåvirkede modalkoordinater, selv hvis $\zeta \ll 1$. En praktisk tilnærmelse i dette tilværelse er herved

$$\left. \begin{aligned} q_i(t) &\simeq q_i^{(0)}(t) - 2\omega_i \sqrt{\frac{\omega_j M_j}{\omega_i M_i}} \zeta_{ij} \int_0^t h_i(t-\tau) \dot{q}_j^{(0)}(\tau) d\tau, & i = 1, \dots, n, \quad i \neq j \\ q_i(t) &\simeq q_j^{(0)}(t), & i = j \end{aligned} \right\} \quad (3-191)$$

Ved tæt sammenliggende egenfrekvenser, fx. $\omega_j \simeq \omega_i$, kan egensvingningsgensvaret i $\dot{q}_j^{(0)}(t)$ resonanspåvirke $q_i^{(1)}(t)$, jf. (3-188b). I dette tilfælde må modalkoblingerne tages i regning, men kun mellem den i . og den j . egensvingning.

For $\zeta \ll 1$ kan modalkoblingerne generelt ignoreres i tilfælde af veladskilte egenfrekvenser.

3.7 Udvikling i dæmpede egensvingningsformer

Betragt identiteten

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (3-192)$$

Kombineres (3-192) med (3-36) fremkommer

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3-193)$$

eller

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\mathbf{z} &= \mathbf{F}(t), \quad t > 0 \\ \mathbf{z}(0) &= \mathbf{z}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-194)$$

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix} \quad (3-195)$$

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3-196)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (3-197)$$

I det følgende forudsættes, at \mathbf{C} er symmetrisk og positiv definit. Da samtidig \mathbf{M} og \mathbf{K} er symmetriske, bliver \mathbf{A} og \mathbf{B} symmetriske. Selv om \mathbf{M} , \mathbf{C} og \mathbf{K} alle er positiv definit, er dette ikke tilfældet for hverken \mathbf{A} eller \mathbf{B} . Således haves for $\mathbf{z}^T = [\mathbf{x}^T, \dot{\mathbf{x}}^T]$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{z} &= \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z} &= \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} - \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \quad (3-198)$$

Afhængig af størrelsen og fortegnet af komponenterne i vektorerne \mathbf{x} og $\dot{\mathbf{x}}$, kan højresiderne af (3-198) være positive eller negative.

Egensvingninger af systemet (3-194) er givet ved

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{B} \mathbf{z} &= \mathbf{0}, \quad t > 0 \\ \mathbf{z}(0) &= \mathbf{z}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-199)$$

Løsninger søges på formen

$$\mathbf{z}(t) = \operatorname{Re}(\Psi e^{\lambda t}) \quad (3-200)$$

hvor Ψ er en konstant kompleks vektor af dimension $2n$, og λ er en kompleks konstant.

Ved indsætning ses, at (3-200) er en løsning til (3-199), hvis og kun hvis Ψ er en løsning til det lineære egenværdiproblem af dimension $2n$

$$(\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}) \Psi = \mathbf{0} \quad (3-201)$$

Den nødvendige betingelse for løsninger til det homogene ligningssystem er, at determinanten til koefficientmatricen er lig 0. Dette fører til den karakteristiske ligning

$$\det(\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}) = 0 \quad (3-202)$$

(3-202) repræsenterer en $2n$. gradsligning i λ med reelle koefficienter. Rødderne i denne udgør egenværdierne λ_j , $j = 1, \dots, 2n$. For hver egenværdi eksisterer en ikke-triviel

løsning $\Psi^{(j)}$ til (3-201), der er bestemt på nær en arbitrær faktor. Egenverdierne λ_j kan være såvel reelle som komplekse. Afhængig heraf bliver koefficientmatricen i (3-201), og dermed egenvektorerne $\Psi^{(j)}$, tilsvarende reelle eller komplekse.

(3-201) er af præcis samme form som (3-43). \mathbf{B} svarer til \mathbf{K} , \mathbf{A} svarer til \mathbf{M} og λ svarer til $-\omega^2$. Analogt til \mathbf{M} og \mathbf{K} er \mathbf{A} og \mathbf{B} symmetriske. Kun denne egenskab er nødvendig for at bevise ortogonalitetsegenskaberne (3-137), (3-138). Der gælder derfor for såvel reelle som komplekse egenvektorer

$$\Psi^{(i)T} \mathbf{A} \Psi^{(j)} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ m_j & , \quad i = j \end{cases} \quad (3-203)$$

$$\Psi^{(i)T} \mathbf{B} \Psi^{(j)} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ -\lambda_j m_j & , \quad i = j \end{cases} \quad (3-204)$$

hvor

$$m_j = \Psi^{(j)T} \mathbf{A} \Psi^{(j)} \quad (3-205)$$

m_j betegnes *den dæmpede modalmasse*. Denne er kompleks, når $\Psi^{(j)}$ er kompleks.

Det fremgår af (3-201), at (λ_j^*, Ψ_j^*) er en løsning til egenværdiproblemet, hvis (λ_j, Ψ_j) er en løsning. Alle komplekse egenverdier forekommer således i par, der er hinandens kompleks konjugerede. Det samlede antal komplekse egenverdier er herved et lige antal. Da det totale antal egenverdier er $2n$, er også antallet af reelle egenverdier et lige antal.

Den afgørende forskel på egenværdiproblemerne (3-43) og (3-201) er, at hverken \mathbf{A} eller \mathbf{B} er positiv definitte i modsætning til \mathbf{M} og \mathbf{K} . I forbindelse med beviset for sætning 3-1 blev egenskaben, at \mathbf{M} er positiv definit, benyttet til at udelukke betingelsen (3-52), hvorved det bliver logisk tvingende, at (3-51) er gældende. Når λ_j er kompleks, er $\lambda_j^* \neq \lambda_j$ en egenverdi med egenvektoren $\Psi^{(j)*} \neq \Psi^{(j)}$. I henhold til (3-203) og (3-204) er dermed $(\Psi^{(j)*})^T \mathbf{A} \Psi^{(j)} = (\Psi^{(j)*})^T \mathbf{B} \Psi^{(j)} = 0$. Dette er i overensstemmelse med, at når den til (3-51) analoge betingelse ikke er opfyldt, må den til (3-52) analoge betingelse nødvendigvis opfyldes.

Egenverdierne skrives på formen

$$\lambda_j = -\mu_j + i\nu_j \quad (3-206)$$

hvor μ_j og ν_j er reelle. Herved kan komponenterne i (3-200) skrives

$$\begin{aligned} z_k(t) &= \operatorname{Re}(\Psi_k^{(j)} e^{(-\mu_j + i\nu_j)t}) \\ &= \operatorname{Re}\left(\left|\Psi_k^{(j)}\right| e^{-i\alpha_j} e^{(-\mu_j + i\nu_j)t}\right) \end{aligned}$$

$$= \left| \Psi_k^{(j)} \right| e^{-\mu_j t} \cos(\nu_j t - \alpha_j) \quad , \quad k = 1, \dots, 2n \quad (3-207)$$

$$\tan \alpha_k = -\frac{\operatorname{Im}(\Psi_k^{(j)})}{\operatorname{Re}(\Psi_k^{(j)})} \quad , \quad k = 1, \dots, 2n \quad (3-208)$$

Egensvingningerne (3-207) må alle klinge bort for $t \rightarrow \infty$, da systemet er forudsat dissipativt (\mathbf{C} er positiv definit). Der må derfor altid gælde, at realdelen μ_j er positiv. Når λ_j er kompleks, angiver (3-207) en underkritisk dæmpet egensvingning med den dæmpede cykliske egenfrekvens ν_j , jf. (2-52) og figur 2-9. Tilsvarende, når λ_j er reel ($\nu_j = 0$), angiver (3-207) en overkritisk dæmpet egensvingning, jf. (2-48) og figur 2-11.

Af (3-195) og (3-199) følger, at egenvektorerne har formen

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Phi \\ \lambda \Phi \end{bmatrix} \quad (3-209)$$

Ved indsætning af (3-197) og (3-209) i (3-201) ses, at Φ er løsning til egenværdiproblemet

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) \Phi = \mathbf{0} \quad (3-210)$$

(3-210) er igen et homogent ligningssystem. Den karakteristiske ligning bliver

$$\det(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) = 0 \quad (3-211)$$

(3-210) er ikke-lineært egenværdiproblem af orden n . Rødderne λ_j til de karakteristiske ligninger (3-202) og (3-211) er identiske, og egenvektorerne $\Phi^{(j)}$ til (3-210) udgør halvdelen af egenvektoren $\Psi^{(j)}$ til (3-201). Undertiden vælger man alligevel at løse egenværdiproblemet (3-201) af dobbelt orden, da dette er lineært og på en standardform, for hvilke effektive numeriske algoritmer er tilgængelig.

Egenvektoren $\Phi^{(j)}$ af dimension n betegnes *den dæmpede egensvingningsform i den j . egensvingning*. Ved (3-197), (3-205), (3-209) følger, at den dæmpede modalmasse kan skrives

$$m_j = \Phi^{(j)T} \mathbf{C} \Phi^{(j)} + 2\lambda_j \Phi^{(j)T} \mathbf{M} \Phi^{(j)} \quad (3-212)$$

I det følgende antages, at samtlige egensvingninger er underkritisk dæmpede. Egensvingningsformerne samles i følgende komplekse modalmatrix af dimension $n \times 2n$

$$\mathbf{P} = [\Phi^{(1)} \quad \Phi^{(1)*} \quad \Phi^{(2)} \quad \Phi^{(2)*} \quad \dots \quad \Phi^{(n)} \quad \Phi^{(n)*}] \quad (3-213)$$

Egensvingningsformerne $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(n)}$ kan alle vælges, så de tilsvarende egenverdier har positiv imaginærdel ν_j . Egenvektorerne $\Phi^{(1)*}, \Phi^{(2)*}, \dots, \Phi^{(n)*}$ har herved tilsvarende egenverdier med negativ imaginærdel. Herved kan egensvingningsformerne $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(n)}$ ordnes efter voksende værdier af ν_j , dvs. $0 < \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_n$.

Løsningen til (3-194) er en reel $2n$ -dimensional vektor. Betragt rækken

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{j=1}^n \Psi^{(j)} q_j(t) + \Psi^{(j)*} q_j^*(t) \quad (3-214)$$

(3-214) kan alternativ skrives på følgende ensbetydende måder

$$\mathbf{z}(t) = 2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}(\Psi^{(j)} q_j(t)) \quad (3-215)$$

$$\mathbf{z}(t) = 2 \sum_{j=1}^n \left(\operatorname{Re}(\Psi^{(j)}) \operatorname{Re}(q_j(t)) - \operatorname{Im}(\Psi^{(j)}) \operatorname{Im}(q_j(t)) \right) \quad (3-216)$$

(3-216) er en udvikling af $\mathbf{z}(t)$ efter de $2n$ lineært uafhængige basisvektor $\operatorname{Re}(\Psi^{(j)})$, $\operatorname{Im}(\Psi^{(j)})$, $j = 1, \dots, n$, hvilket viser gyldigheden af (3-214). $q_j(t)$ betegnes *de dæmpede modalkoordinater*. Disse er komplekse ved underkritisk dæmpede egensvingninger, og reelle ved kritisk og overkritisk dæmpede egensvingninger.

(3-214) indsættes i (3-194). Herved

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{A}(\Psi^{(j)} \dot{q}_j + \Psi^{(j)*} \dot{q}_j^*) + \sum_{j=1}^n \mathbf{B}(\Psi^{(j)} q_j + \Psi^{(j)*} q_j^*) &= \mathbf{F}(t), \quad t > 0 \\ \sum_{j=1}^n (\Psi^{(j)} q_j(0) + \Psi^{(j)*} q_j^*(0)) &= \mathbf{z}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-217)$$

Ved anvendelse af (3-203), (3-204) for henholdsvis egensvingningsformerne $\Psi^{(i)}$ og $\Psi^{(i)*}$, $i = 1, \dots, n$ findes

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i - \lambda_i q_i &= \frac{1}{m_i} \Psi^{(i)T} \mathbf{F}(t), \quad t > 0 \\ q_i(0) &= \frac{1}{m_i} \Psi^{(i)T} \mathbf{A} \mathbf{z}_0 \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-218)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i^* - \lambda_i^* q_i^* &= \frac{1}{m_i^*} (\Psi^{(i)*})^T \mathbf{F}(t), \quad t > 0 \\ q_i^*(0) &= \frac{1}{m_i^*} (\Psi^{(i)*})^T \mathbf{A} \mathbf{z}_0 \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-219)$$

I (3-219) er benyttet, at modalmassen svarende til egenvektoren $\Psi^{(i)*}$ er lig $(\Psi^{(i)*})^T \mathbf{A} \Psi^{(i)*} = (\Psi^{(i)T} \mathbf{A} \Psi^{(i)})^* = m_i^*$. (3-219) er den komplekse konjugerede af (3-218), og indeholder dermed ingen ny information. Af betydning er derfor kun den komplekse differentialligning af 1. orden (3-218), der er ækvivalent med 2 koblede reelle differentialligninger af 1. orden for henholdsvis real- og imaginærdelen af $q_i(t)$. Dette skal sammenlignes med, at de udæmpede modalkoordinater i det dekooblede tilfælde er bestemt ved den reelle differentialligning af 2. orden (3-165), der ligeledes er ækvivalent med 2 differentialligninger af 1. orden.

Specielt for flytningsgensvaret findes ved (3-195), (3-209), (3-215)

$$\mathbf{x}(t) = 2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}(\Phi^{(j)} q_j(t)) \quad (3-220)$$

De dæmpede modalkoordinater bestemmes af (3-218). Løsningen bliver

$$q_i(t) = e^{\lambda_i t} \left(\int_0^t e^{-\lambda_i \tau} \frac{1}{m_i} \Psi^{(i)T} \mathbf{F}(\tau) d\tau + q_i(0) \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (3-221)$$

Ved (3-196), (3-209) følger

$$\Psi^{(i)T} \mathbf{F}(\tau) = \Phi^{(i)T} \mathbf{f}(\tau) \quad (3-222)$$

Begyndelsesbetingelsen $q_i(0)$ er givet ved (3-218). Ved (3-195), (3-197), (3-209) haves

$$\begin{aligned} q_i(0) &= \frac{1}{m_i} \begin{bmatrix} \Phi^{(i)} \\ \lambda_i \Phi^{(i)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{m_i} \Phi^{(i)T} ((\mathbf{C} + \lambda_i \mathbf{M}) \mathbf{x}_0 + \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_0), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3-223)$$

Ved indsætning af (3-221), (3-222), (3-223) i (3-220) findes endelig

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= 2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \left(\frac{1}{m_j} \Phi^{(j)} \Phi^{(j)T} \left[\int_0^t e^{\lambda_j(t-\tau)} \mathbf{f}(\tau) d\tau + e^{\lambda_j t} (\mathbf{C} + \lambda_j \mathbf{M}) \mathbf{x}_0 + e^{\lambda_j t} \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_0 \right] \right) \\ &= (\dot{\mathbf{h}}(t) \mathbf{M} + \mathbf{h}(t) \mathbf{C}) \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}(t) \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_0 + \int_0^t \mathbf{h}(t-\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3-224)$$

$$\mathbf{h}(t) = 2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \left(\frac{e^{\lambda_j t}}{m_j} \Phi^{(j)} \Phi^{(j)T} \right)$$

$$= 2 \sum_{j=1}^n e^{-\mu_j t} \left(\operatorname{Re} \left(\frac{1}{m_j} \Phi^{(j)} \Phi^{(j)T} \right) \cos \nu_j t - \operatorname{Im} \left(\frac{1}{m_j} \Phi^{(j)} \Phi^{(j)T} \right) \sin \nu_j t \right) \quad (3-225)$$

(3-224) er identisk med (3-132). (3-225) angiver den analytiske løsning for impuls-responsmatricen baseret på udvikling i dæmpede egensvingningsformer, der er mere generel end den tilsvarende løsning (3-172) baseret på udæmpede egensvingningsformer og modal dekopling, da der her kun forudsættes, at \mathbf{C} er symmetrisk. Egenskaben $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ er nødvendig for at kunne bevise ortogonalitetsegenskaberne (3-203), (3-204). Når \mathbf{C} er symmetrisk, dekoobler modalkoordinatligningerne således totalt ved udvikling i dæmpede egensvingningsformer.

Det kvasi-statistiske gensvar findes ved at ignorere \dot{q}_i i (3-218) hvorved

$$q_i(t) = \frac{1}{-\lambda_i m_i} \Psi^{(i)T} \mathbf{F}(t) = \frac{1}{-\lambda_i m_i} \Phi^{(i)T} \mathbf{f}(t) \quad (3-226)$$

Ved indsætning af (3-226) i (3-220) findes

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}(t) = 2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \left(\Phi^{(j)} \frac{1}{-\lambda_j m_j} \Phi^{(j)T} \mathbf{f}(t) \right) \\ &= \left(2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \left(\frac{1}{-\lambda_j m_j} \Phi^{(j)} \Phi^{(j)T} \right) \right) \mathbf{f}(t) \Rightarrow \\ \mathbf{K}^{-1} &= 2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \left(\frac{1}{-\lambda_j m_j} \Phi^{(j)} \Phi^{(j)T} \right) \end{aligned} \quad (3-227)$$

(3-227) angiver analogien til Mercers sætning (3-175) ved udvikling i dæmpede egensvingningsformer.

μ_j og ν_j i (3-206) skrives på formen

$$\left. \begin{aligned} \mu_j &= \zeta_j^{(d)} \omega_j^{(d)} \\ \nu_j &= \omega_j^{(d)} \sqrt{1 - (\zeta_j^{(d)})^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\zeta_j^{(d)} = \frac{\mu_j}{\sqrt{\mu_j^2 + \nu_j^2}} \quad (3-228)$$

$$\omega_j^{(d)} = \sqrt{\mu_j^2 + \nu_j^2} \quad (3-229)$$

Ved dæmpede egensvingninger, hvor kun den j . dæmpede egensvingningsform påvirkes, angiver $\zeta_j^{(d)}$ dæmpningsforholdet i egensvingningen. Det er i princippet $\zeta_j^{(d)}$ og $\omega_j^{(d)}$, der måles ved et egensvingningsforsøg af et lineær viskos dæmpet system af n frihedsgrader ved identifikationsmetoden givet ved (2-60), (2-61). Kun når dekoblingsbetingelsen (3-164) er opfyldt, er $\zeta_j^{(d)} = \zeta_j$ og $\omega_j^{(d)} = \omega_j$, hvor ζ_j er dæmpningsforholdet defineret ved (3-162), og ω_j er den j . udæmpede cykliske egenfrekvens. Når konstruktionen er svagt dæmpet, og egenfrekvenserne er vel adskilte, er forskellen på $\zeta_j^{(d)}$ og ζ_j og på $\omega_j^{(d)}$ og ω_j helt uvæsentlig.

Eksempel 3-10: Dæmpede egensvingninger af 2 frihedsgraders system

For systemet i eksempel 3-4 vælges $k_1 = k_2 = k_3 = 100$ N/m, $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $c_1 = 0.1$ kg/s, $c_2 = 0.2$ kg/s, $c_3 = 0.3$ kg/s. Herved er, jf. (3-40)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ kg}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 \\ -0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ kg/s}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix} \text{ N/m} \quad (3-230)$$

Dæmpede egensvingninger ønskes bestemt fra begyndelsesbetingelserne $x_1(0) = 0.1$ m, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$. Bevægelsen bestemmes dels ved udvikling i dæmpede egensvingningsformer, dels ved udvikling i udæmpede egensvingningsformer, idet eventuelle modalkoblinger ignoreres.

De udæmpede cykliske egenfrekvenser bliver ved (3-61)

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= 7.96225 \text{ s}^{-1} \\ \omega_2 &= 15.38189 \text{ s}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (3-231)$$

De udæmpede egensvingningsformer er givet ved (3-62). Dæmpningsforholdene ζ_1, ζ_2 og den modale koblingskoefficient ζ_{12} udregnes herefter ved indsætning af (3-230) i (3-162), (3-163)

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= 0.00911151, \zeta_2 = 0.01316171 \\ \zeta_{12} &= 0.0027667 \end{aligned} \right\} \quad (3-232)$$

Af (3-231) og (3-232) følger ved (3-167)

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 \omega_1 &= 0.0725481 \text{ s}^{-1}, \omega_{d,1} = 7.961920 \text{ s}^{-1} \\ \zeta_2 \omega_2 &= 0.2024520 \text{ s}^{-1}, \omega_{d,2} = 15.38056 \text{ s}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (3-233)$$

Af (3-155) følger

$$\left. \begin{aligned} q_1(0) &= 0.0288675 \text{ m}, \quad \dot{q}_1(0) = 0 \\ q_2(0) &= -0.0288675 \text{ m}, \quad \dot{q}_2(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-234)$$

Når modalkoblingen ignoreres, er udæmpede modalkoordinater givet ved (3-166). Heri indsættes $F_i(\tau) \equiv 0$ og (3-234). Løsningen givet ved (3-150) bliver herved

$$\mathbf{x}^{(u)}(t) = e^{-\zeta_1 \omega_1 t} \cos \omega_{d,1} t \begin{bmatrix} 0.0211325 \\ 0.0288675 \end{bmatrix} + e^{-\zeta_1 \omega_1 t} \sin \omega_{d,1} t \begin{bmatrix} 0.000192557 \\ 0.000263037 \end{bmatrix}$$

$$+e^{-\zeta_2\omega_2 t} \cos \omega_{d,2} t \begin{bmatrix} 0.0788675 \\ -0.0288675 \end{bmatrix} + e^{-\zeta_2\omega_2 t} \sin \omega_{d,2} t \begin{bmatrix} 0.001038112 \\ -0.000379978 \end{bmatrix} \quad (3-235)$$

Enheden af alle led i (3-235) er m. Da koblingskoefficienten $\zeta_{12} \neq 0$, vil (3-235) kun være en tilnærmet løsning til (3-39).

De dæmpede egensvingningsformer bestemmes ved indsætning af (3-230) i (3-210). Herved fremkommer egenværdiproblemet

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + 0.3\lambda + 200 & -0.2\lambda - 100 \\ -0.2\lambda - 100 & 2\lambda^2 + 0.5\lambda + 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-236)$$

Den karakteristiske ligning (3-211) bliver

$$2\lambda^4 + 0.11\lambda^3 + 400.11\lambda^2 + 120\lambda + 30000 = 0 \quad (3-237)$$

Løsningen til (3-237) bliver

$$\left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_1^* \end{matrix} \right\} = -\mu_1 \pm i\nu_1, \quad \left. \begin{matrix} \lambda_2 \\ \lambda_2^* \end{matrix} \right\} = -\mu_2 \pm i\nu_2 \quad (3-238)$$

$$\left. \begin{matrix} \mu_1 = 0.0725486 \text{ s}^{-1}, \nu_1 = 7.962008 \text{ s}^{-1} \\ \mu_2 = 0.2024514 \text{ s}^{-1}, \nu_2 = 15.38039 \text{ s}^{-1} \end{matrix} \right\} \quad (3-239)$$

$\lambda = \lambda_1$ indsættes i (3-236). $\Phi_2^{(1)}$ vælges på vanlig vis til 1, hvorefter $\Phi_1^{(1)}$, bestemmes af én af ligningerne. Samme fremgangsmåde benyttes for $\lambda = \lambda_2$. Herved opnås følgende dæmpede egensvingningsformer

$$\left. \begin{matrix} \Phi^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.732058 \\ 1.000000 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0.00504816 \\ 0.00000000 \end{bmatrix} \\ \Phi^{(2)} = \begin{bmatrix} -2.731308 \\ 1.000000 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0.0363826 \\ 0.00000000 \end{bmatrix} \end{matrix} \right\} \quad (3-240)$$

De dæmpede modalmasser bliver ved (3-212)

$$\left. \begin{matrix} m_1 = -0.117704 + 40.3806i \\ m_2 = 6.113805 + 290.9639i \end{matrix} \right\} \quad (3-241)$$

Ved indsætning af (3-230), (3-238), (3-240), (3-241) i (3-223) findes begyndelsesbetingelserne

$$\left. \begin{matrix} q_1(0) = 0.0144375 + 0.000140395i \\ q_2(0) = -0.0144375 + 0.000049261i \end{matrix} \right\} \quad (3-242)$$

De dæmpede modalkoordinater bestemmes af (3-221). Heri indsættes (3-242) og $\mathbf{F}(t) \equiv 0$. Løsningen givet ved (3-220) bliver herved

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(d)}(t) = & e^{-\mu_1 t} \cos \nu_1 t \begin{bmatrix} 0.0211368 \\ 0.0288751 \end{bmatrix} - e^{\mu_1 t} \sin \nu_1 t \begin{bmatrix} 0.000351321 \\ 0.000280791 \end{bmatrix} \\ & + e^{-\mu_2 t} \cos \nu_2 t \begin{bmatrix} 0.0788632 \\ -0.0288751 \end{bmatrix} - e^{-\mu_2 t} \sin \nu_2 t \begin{bmatrix} -0.001319643 \\ 0.000098521 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-243)$$

Enheden af alle led i (3-243) er m.

Såvel $\mathbf{x}^{(d)}(t)$ som løsningen $\mathbf{x}^{(u)}(t)$ ved udvikling i udæmpede egensvingningsformer tilfredsstiller begyndelsesbetingelserne. $\mathbf{x}^{(d)}(t)$ tilfredsstiller tillige bevægelsesligningen eksakt. Indsættes derimod $\mathbf{x}^{(u)}(t)$ i (3-39) med $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{0}$, kan resultatet skrives

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}^{(u)} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}^{(u)} + \mathbf{K}\mathbf{x}^{(u)} = \mathbf{e}(t) \quad (3-244)$$

hvor

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) = & e^{-\zeta_1 \omega_1 t} \cos \omega_{d,1} t \begin{bmatrix} 3.83 \cdot 10^{-6} \\ -8.29 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix} + e^{-\zeta_1 \omega_1 t} \sin \omega_{d,1} t \begin{bmatrix} 1.9906 \cdot 10^{-2} \\ -1.4572 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \\ & + e^{-\zeta_2 \omega_2 t} \cos \omega_{d,2} t \begin{bmatrix} -6.62 \cdot 10^{-6} \\ -8.64 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} + e^{-\zeta_2 \omega_2 t} \sin \omega_{d,2} t \begin{bmatrix} 3.8458 \cdot 10^{-2} \\ 10.5070 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-245)$$

Enheden af alle led i (3-245) er N. Residualbelastningen $\mathbf{e}(t)$ på højresiden af (3-244) angiver ubalancen mellem inerti-, dæmpnings- og elastiske kræfter. $\mathbf{e}(t)$ er den direkte følge af at ignorere modalkoblingen mellem de udæmpede modalkoordinater. Komponenterne på højresiden af (3-245) skal sammenlignes med komponenter af inertikræfterne og de elastiske kræfter, der alle er af størrelsesorden 10 N.

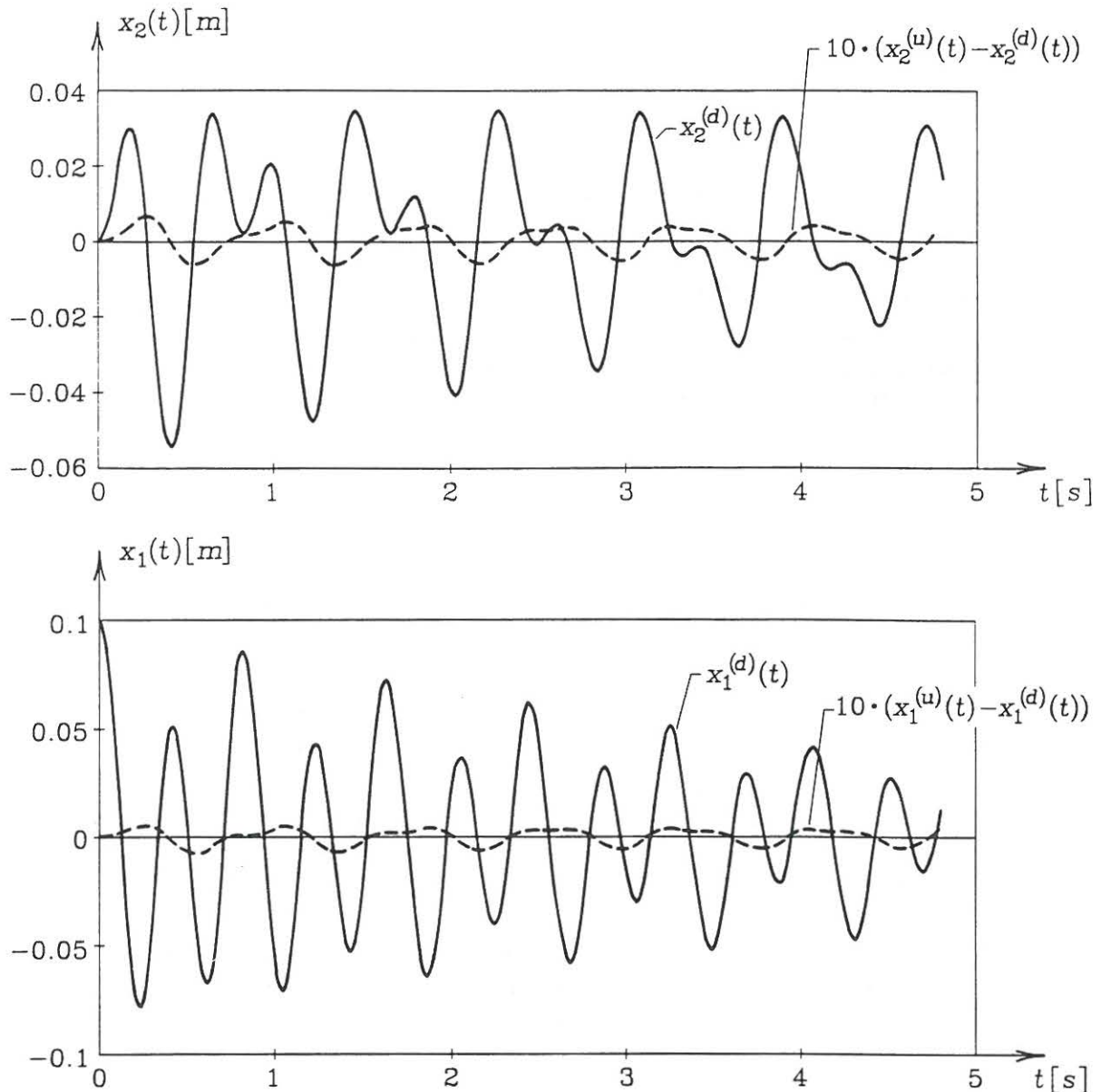
Den numerisk største forskel mellem den tilnærmede løsning (3-235) og den eksakte løsning (3-243) optræder til tiden $t = 0.54$ s i komponenten $x_1(t)$ og bliver $|x_1^{(u)}(0.54) - x_1^{(d)}(0.54)| = 0.00071$ m. Dette skal sammenlignes med, at $x_1(t)$ er af størrelsen 0.07 m. Løsningen er vist nedenfor på figur 3-8.

Konklusionen på undersøgelsen er, at forskellen mellem den tilnærmede løsning med udvikling i udæmpede modalkoordinater, hvor der ses bort fra modalkoblinger, og den eksakte løsning er ignorabel. Dette skyldes, at de cykliske egenfrekvenser er veladskilte, og at systemet er letdæmpet ($\zeta_i \ll 1$), jf. bemærkninger i forbindelse med (3-191).

Ved indsætning af (3-239) i (3-228), (3-229) findes

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1^{(e)} &= 0.00911147, \quad \omega_1^{(e)} = 7.96234 \text{ s}^{-1} \\ \zeta_2^{(e)} &= 0.01316182, \quad \omega_2^{(e)} = 15.38172 \text{ s}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (3-246)$$

Ved sammenligning (3-231), (3-232) og (3-246) ses, at der er en helt ignorabel forskel på henholdsvis ω_i og $\omega_i^{(e)}$ og på ζ_i og $\zeta_i^{(e)}$.



Figur 3-8: Dæmpede egensvingninger af 2 frihedsgraders system.

3.8 Systemreduktion

I de foregående afsnit 3.6 og 3.7 blev angivet analytiske metoder til bestemmelser af gensvaret for et system af n frihedsgrader, der i princippet er baseret på en omformulering af det oprindelige problem i et nyt sæt frihedsgrader. Ved metoden i afsnit 3.6 diagonaliseres masse- og stivhedsmatrix, hvorimod dæmpningsmatricen i almindelighed ikke diagonaliseres. Ved metoden i afsnit 3.7 diagonaliseres alle 3 systemmatricer, når blot dæmpningsmatricen er symmetrisk, hvorved en total dekopling af de omformulerede frihedsgrader opnås. Metoderne kræver kendskab til alle n egensvingningsformer, hvilket kan være vanskeligt at opnå, hvis n er meget stor. Der er derfor god grund

til at undersøge muligheden for at reducere antallet af dynamiske frihedsgrader fra n til $n_1 \leq n$, idet der tilsvarende kun kræves kendskab til n_1 egensvingningsformer og tilhørende egenfrekvenser.

En fremgangsmåde, hvor antallet af frihedsgrader indskrænkes, betegnes en *systemreduktion*. Systemreduktion er altid forbundet med tab af nøjagtighed. Minimeringen af unøjagtigheden kan kun foretages, når valget af dynamiske frihedsgrader sker ud fra en fysisk indsigt i problemet.

Systemet (3-161) er baseret på en udvikling i udæmpede egensvingningsformer. Baseret på en indledende frekvensanalyse antages, at den ydre dynamiske belastningsvektor $\mathbf{f}(t)$ indeholder harmoniske komponenter beliggende i et passende interval. Antag, at n_1 af modalkoordinaterne har cykliske egenfrekvenser i det omtalte frekvensinterval, mens de resterende $n - n_1$ modalkoordinater har cykliske egenfrekvenser uden for intervallet. Dynamisk forstærkning som følge af resonanspåvirkning vil herved hovedsageligt gøre sig gældende for de førstnævnte n_1 modalkoordinater. For disse indføres betegnelsen *dynamisk påvirkede modalkoordinater*. For de øvrige er dynamiske virkninger som følge af inertio- og dæmpningskræfter ignorable. Modalbelastningen $F_i(t)$ i (3-161) afbalanceres i dette tilfælde primært af den modale elastiske tilbageføringskraft $\omega_i^2 M_i q_i(t)$. For disse frihedsgrader indføres betegnelsen *kuasistatisk påvirkede modalkoordinater*. Egensvingningerne nummereres, så de dynamisk forstærkede frihedsgrader svarer til de n_1 første frihedsgrader. (3-161) kan herved skrives

$$\ddot{q}_i + 2\omega_i \left(\zeta_i \dot{q}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_1} \sqrt{\frac{\omega_j M_j}{\omega_i M_i}} \zeta_{ij} \dot{q}_j \right) + \omega_i^2 q_i = \frac{1}{M_i} F_i(t), \quad i = 1, \dots, n_1 \quad (3-247a)$$

$$q_i(t) = \frac{1}{\omega_i^2 M_i} F_i(t) = \frac{1}{\omega_i^2 M_i} \Phi^{(i)T} \mathbf{f}(t), \quad i = n_1 + 1, \dots, n \quad (3-247b)$$

Ved indsætning af (3-247b) i (3-150) og ved anvendelse af (3-175) haves

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{i=1}^{n_1} q_i(t) \Phi^{(i)} + \sum_{i=n_1+1}^n q_i(t) \Phi^{(i)} \\ &\simeq \sum_{i=1}^{n_1} q_i(t) \Phi^{(i)} + \left(\sum_{i=n_1+1}^n \frac{1}{\omega_i^2 M_i} \Phi^{(i)} \Phi^{(i)T} \right) \mathbf{f}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} q_i(t) \Phi^{(i)} + \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2 M_i} \Phi^{(i)} \Phi^{(i)T} - \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{\omega_i^2 M_i} \Phi^{(i)} \Phi^{(i)T} \right) \mathbf{f}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} q_i(t) \Phi^{(i)} + \left(\mathbf{K}^{-1} - \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{\omega_i^2 M_i} \Phi^{(i)} \Phi^{(i)T} \right) \mathbf{f}(t) \end{aligned} \quad (3-248)$$

Transformationen (3-248) kræver kendskab til $\Phi^{(i)}$, ω_i , $i = 1, \dots, n_1$, tillige med fleksibilitetsmatricen K^{-1} . De dynamiske modalkoordinater $q_i(t)$, $i = 1, \dots, n_1$, bestemmes ved løsning af det koblede, reducerede differentiaalligningssystem (3-247a).

Sidsteleddet på højresiden af (3-248) repræsenterer den kvasi-statistiske del af gensvaret. Undertiden ignoreres dette bidrag, hvorved

$$\mathbf{x}(t) \simeq \sum_{i=1}^{n_1} q_i(t) \Phi^{(i)} \quad (3-249)$$

Det er klart, at (3-249) bliver en stadig bedre approksimation til (3-248), jo tættere n_1 er på n . Man tester i praksis gyldigheden af (3-249) ved at undersøge følsomheden på løsningen $\mathbf{x}(t)$, når n_1 øges med 1.

Modalkoordinaterne ved udvikling i dæmpede egensvingningsformer kan ligeledes deles i n_1 dynamisk påvirkede modalkoordinater, og $n - n_1$ kvasi-statisk påvirkede modalkoordinater. De kvasi-statisk påvirkede modalkoordinater er givet ved (3-226). For (3-220) foretages en omskrivning analog til (3-248). Ved (3-226) og (3-227) findes

$$\mathbf{x}(t) = 2 \sum_{i=1}^{n_1} \operatorname{Re} \left(q_i(t) \Phi^{(i)} \right) + \left(K^{-1} - 2 \sum_{i=1}^{n_1} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{-\lambda_i m_i} \Phi^{(i)} \Phi^{(i)T} \right) \right) \mathbf{f}(t) \quad (3-250)$$

De dynamisk påvirkede modalkoordinater er fortsat givet ved (3-221).

De anførte reduktionsmetoder er baseret på en opdeling i henholdsvis dynamisk påvirkede modalkoordinater og modalkoordinater, for hvilke inert- og dæmpningsbelastninger er ignorable. Guyan¹ har angivet en alternativ reduktionsmetode, der er baseret på en analog opdeling af de oprindelige frihedsgrader $\mathbf{x}(t)$ i en undervektor $\mathbf{x}_1(t)$ af frihedsgrader, der er påvirkede af inert- og dæmpningskræfter, mens disse påvirkninger antages ignorable for de resterende frihedsgrader samlet i undervektoren $\mathbf{x}_2(t)$. Dimensionen af $\mathbf{x}_1(t)$ er n_1 , og dimensionen af $\mathbf{x}_2(t)$ er $n_2 = n - n_1$. For frihedsgraderne i $\mathbf{x}_2(t)$ afbalanceres de ydre belastninger herved udelukkende af de elastiske tilbageføringskræfter. Under denne forudsætning kan (3-36) skrives på formen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_1 \\ \ddot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(t) \\ \mathbf{f}_2(t) \end{bmatrix}, \quad t > 0 \quad (3-251)$$

$-\mathbf{M}_{11}\ddot{\mathbf{x}}_1$ og $-\mathbf{C}_{11}\dot{\mathbf{x}}_1$ angiver inert- og dæmpningsbelastningen af frihedsgraderne i \mathbf{x}_1 . $\mathbf{f}_1(t)$ og $\mathbf{f}_2(t)$ er undervektorer af $\mathbf{f}(t)$, der henholdsvis angiver de ydre belastninger af frihedsgraderne i \mathbf{x}_1 og \mathbf{x}_2 . \mathbf{K}_{11} , \mathbf{K}_{12} og \mathbf{K}_{22} angiver undermatricer i den opdelte stivhedsmatrix \mathbf{K} .

Af de sidste n_2 ligninger i (3-251) følger

$$\mathbf{K}_{12}^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{K}_{22} \mathbf{x}_2 = \mathbf{f}_2(t) \Rightarrow$$

¹R. Guyan: Reduction of Stiffness and Mass Matrices, AIAA Journal, Vol. 3, pp. 380 (1965).

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{f}_2(t) - \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{12}^T \mathbf{x}_1(t) \quad (3-252)$$

(3-252) indsættes i de første n_1 ligninger af (3-251).

$$\mathbf{M}_{11} \ddot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{C}_{11} \dot{\mathbf{x}}_1 + \left(\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{12}^T \right) \mathbf{x}_1 = \mathbf{f}_1(t) - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{f}_2(t) \quad (3-253)$$

(3-253) er herved bragt på standardformen (3-36), men af reduceret dimension $n_1 < n$. Den reducerede stivhedsmatrix er givet ved $\mathbf{K}_{11}^{(r)} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{12}^T$, og den reducerede belastningsvektor er givet ved $\mathbf{f}_1^{(r)}(t) = \mathbf{f}_1(t) - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{f}_2(t)$.

$\mathbf{x}_1(t)$ bestemmes først ved løsning af (3-253), hvorefter de resterende kvasi-statiske frihedsgrader $\mathbf{x}_2(t)$ bestemmes af den lineære transformation (3-252).

Guyanreduktion betegnes alternativt *statisk kondensation*. \mathbf{x}_1 og \mathbf{x}_2 betegnes i denne forbindelse henholdsvis *mester- og slavefrihedsgrader*.

3.9 Dæmpningsmodeller

I dette afsnit skal specificeres, hvorledes en klasse af dæmpningsmatricer \mathbf{C} kan opstilles, som samtidig opfylder dekoblingsbetingelsen (3-164).

Udgangspunktet er, at en mængde af modale dæmpningsforhold $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$, $k \leq n$ er kendt. Dette kan f.eks. ske ved måling af halvbåndsbredden ved resonansforsøg som beskrevet i forbindelse med figur 2-16.

Betragt dæmpningsantagelsen

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K} \quad (3-254)$$

Ved (3-137), (3-138) følger heraf

$$\begin{aligned} \Phi^{(i)T} \mathbf{C} \Phi^{(j)} &= a_0 \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \Phi^{(j)} + a_1 \Phi^{(i)T} \mathbf{K} \Phi^{(j)} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ a_0 M_i + a_1 \omega_i^2 M_i & , \quad i = j \end{cases} \end{aligned} \quad (3-255)$$

Følgelig er modellen (3-254) en tilstrækkelig betingelse for dekobling. Ved sammenligning med (3-164) følger, at modal dæmpningsforholdene bliver

$$\zeta_i = \frac{1}{2\omega_i} (a_0 + a_1 \omega_i^2) = \frac{a_0}{2\omega_i} + \frac{a_1}{2} \omega_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-256)$$

De modale dæmpningsforhold ζ_1 og ζ_2 antages fastlagt ved målinger. Parametrene a_0 og a_1 kan herved kalibreres ud fra (3-256) for $i = 1, 2$

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\omega_1} & \frac{1}{2}\omega_1 \\ \frac{1}{2\omega_2} & \frac{1}{2}\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \begin{bmatrix} \omega_2 & -\omega_1 \\ -\frac{1}{\omega_2} & \frac{1}{\omega_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \quad (3-257)$$

Med parametrene a_0 og a_1 bestemt ved (3-257), giver (3-254) korrekte værdier for de 2 første modaldæmpningsforhold. De øvrige modaldæmpningsforhold i modellen er dernæst bestemt af (3-256) og vil i almindelighed være forskellig fra eventuelle tilsvarende målte dæmpningsforhold.

Dæmpningsmodellen (3-254) betegnes *Rayleighdæmpning* eller *proportional dæmpning*.

Betragt dernæst dæmpningsmodellen

$$\mathbf{C} = \sum_{m \in I} a_m (\mathbf{KM}^{-1})^m \mathbf{M} \quad (3-258)$$

Indexmængden $I = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ i summationen i (3-258) omfatter i princippet en vilkårlig delmængde af positive eller negative hele tal. Matrixpotensprodukterne i (3-258) fortolkes på følgende vis

$$(\mathbf{KM}^{-1})^m = (\mathbf{KM}^{-1})(\mathbf{KM}^{-1}) \dots (\mathbf{KM}^{-1}), \quad m > 0 \quad (3-259)$$

$$(\mathbf{KM}^{-1})^m = \mathbf{E}, \quad m = 0 \quad (3-260)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{KM}^{-1})^m &= (\mathbf{KM}^{-1})^{-1} (\mathbf{KM}^{-1})^{-1} \dots (\mathbf{KM}^{-1})^{-1} \\ &= (\mathbf{MK}^{-1})(\mathbf{MK}^{-1}) \dots (\mathbf{MK}^{-1}), \quad m < 0 \end{aligned} \quad (3-261)$$

Matrixprodukterne på højresiderne af (3-259) og (3-261) består af m faktorer. Det sidste udsagn af (3-261) følger af identiteten

$$\begin{aligned} (\mathbf{KM}^{-1})(\mathbf{MK}^{-1}) &= \mathbf{E} \Rightarrow \\ (\mathbf{KM}^{-1})^{-1} &= (\mathbf{MK}^{-1}) \end{aligned} \quad (3-262)$$

(3-258) betegnes *Caugheys dæmpningsmodel*.¹ Denne er åbenbart en generalisering af Rayleighs dæmpningsmodel, der opnås for $I = \{0, 1\}$. Det vises i det følgende,

¹T. K. Caughey: Classical Normal Modes in Damped Linear Systems, J. Appl. Mech., Vol. 27, pp. 269-271 (1960).

at Caugheys dæmpningsmodel opfylder dekoblingsbetingelsen (3-164) og samtidig er i stand til at reproducere lige så mange målte dæmpningsforhold, som der medtages i rækken (3-258). Der gælder således ortogonalitetsegenskaben

$$\begin{aligned}\Phi^{(i)T} \mathbf{C} \Phi^{(j)} &= \sum_{m \in I} a_m \Phi^{(i)T} \sum_{m \in I} a_m \Phi^{(i)T} (\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1})^m \mathbf{M} \Phi^{(j)} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ \left(\sum_{m \in I} a_m \omega_i^{2m} \right) M_i & , \quad i = j \end{cases} \end{aligned} \quad (3-263)$$

Gyldigheden af (3-263) er åbenbart vist, hvis det for alle $m \in I$ kan vises, at følgende ortogonalitetsegenskab er gældende

$$\Phi^{(i)T} (\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1})^m \mathbf{M} \Phi^{(j)} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ \omega_i^{2m} M_i & , \quad i = j \end{cases} \quad (3-264)$$

For $m = 0$ og $m = 1$ følger (3-264) af (3-137) og (3-138). For $m > 1$ vises gyldigheden af (3-264) ved induktion. Herved antages, at (3-264) gælder for $m = p$, $p = 1, 2, \dots$, hvorefter gyldigheden af udsagnet eftervises for $m = p+1$. Ved (3-143) og (3-264) haves umiddelbart

$$\begin{aligned}\Phi^{(i)T} (\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1})^{p+1} \mathbf{M} \Phi^{(j)} &= \Phi^{(i)T} (\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1})^p \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \Phi^{(j)} \\ &= \Phi^{(i)T} (\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1})^p \mathbf{K} \Phi^{(j)} = \omega_j^2 \Phi^{(i)T} (\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1})^p \mathbf{M} \Phi^{(j)} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ \omega_i^{2p+2} M_i & , \quad i = j \end{cases} \end{aligned} \quad (3-265)$$

For $m = -1$ haves ved (3-137), (3-143), (3-262)

$$\begin{aligned}\Phi^{(i)T} (\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1})^{-1} \mathbf{M} \Phi^{(j)} &= \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \Phi^{(j)} \\ &= \frac{1}{\omega_j^2} \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \Phi^{(j)} = \frac{1}{\omega_j^2} \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \Phi^{(j)} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ \omega_i^{-2} M_i & , \quad i = j \end{cases} \end{aligned} \quad (3-266)$$

(3-266) viser gyldigheden af (3-264) for $m = -1$. Dernæst antages (3-264) at gælde for $m = -p$, $p = 1, 2, \dots$. For $m = -p-1$ følger heraf ved (3-143), (3-262) og (3-264)

$$\Phi^{(i)T} (\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1})^{-p-1} \mathbf{M} \Phi^{(j)} = \Phi^{(i)T} (\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1})^{-p} (\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1})^{-1} \mathbf{M} \Phi^{(j)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\omega_j^2} \Phi^{(i)T} (\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1})^{-p} \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \Phi^{(j)} \\
&= \frac{1}{\omega_j^2} \Phi^{(i)T} (\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1})^{-p} \mathbf{M} \Phi^{(j)} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ \omega_i^{-2p-2} M_i & , \quad i = j \end{cases} \quad (3-267)
\end{aligned}$$

Ved induktionsbeviserne i forbindelse med (3-265) og (3-267) er gyldigheden af (3-264) herved eftervist.

Ved sammenligning med (3-164) findes modaldæmpningsforholdet til

$$\zeta_i = \frac{1}{2\omega_i} \sum_{m \in I} a_m \omega_i^{2m} = \frac{1}{2} \sum_{m \in I} a_m \omega_i^{2m-1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-268)$$

Teoretisk kan medtages så mange led i rækken, der ønskes. I praksis bliver antallet af led begrænset af, at de modale dæmpningsforhold ζ_i kun kendes for de lavere egensvingningsformer.

Kendes eksempelvis $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ svarende til de 3 laveste egensvingningsformer, kan man tage 3 led med i rækken. Vælges disse svarende til $m = 0, m = 1$ og $m = 2$, fremkommer dæmpningsantagelsen

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K} + a_2 \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \quad (3-269)$$

a_0, a_1, a_2 bestemmes da af ligningssystemet

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 & \omega_1^3 \\ \frac{1}{\omega_2} & \omega_2 & \omega_2^3 \\ \frac{1}{\omega_3} & \omega_3 & \omega_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} \quad (3-270)$$

Den korrekte modaldæmpning opnås i lige så mange egensvingningsformer, som medtages i rækken. For de øvrige egensvingningsformer er dæmpningsforholdet bestemt ved (3-268).

3.10 Rayleighs brøk

Lad \mathbf{x} være flytningen, der fremkaldes af den statiske belastning \mathbf{f} , dvs.

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (3-271)$$

Flytningsvektoren \mathbf{x} kan i henhold til (3-150) skrives som en linearkombination af de udæmpede egensvingningsformer

$$\mathbf{x} = q_1 \Phi^{(1)} + q_2 \Phi^{(2)} + \dots + q_n \Phi^{(n)} \quad (3-272)$$

Man kan nu danne brøken

$$\omega_R^2 = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{f}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} \quad (3-273)$$

Indsættes (3-272) i (3-273) findes ved (3-137), (3-138)

$$\begin{aligned} \omega_R^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i q_j \Phi^{(i)T} \mathbf{K} \Phi^{(j)}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i q_j \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \Phi^{(j)}} \\ &= \frac{q_1^2 M_1 \omega_1^2 + q_2^2 M_2 \omega_2^2 + \dots + q_n^2 M_n \omega_n^2}{q_1^2 M_1 + q_2^2 M_2 + \dots + q_n^2 M_n} \end{aligned} \quad (3-274)$$

Ifølge den tidligere omtalte ordning af de cykliske egenfrekvenser er $0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$. Følgelig gælder

$$\omega_R^2 \geq \frac{q_1^2 M_1 \omega_1^2 + q_2^2 M_2 \omega_1^2 + \dots + q_n^2 M_n \omega_1^2}{q_1^2 M_1 + q_2^2 M_2 + \dots + q_n^2 M_n} = \omega_1^2 \quad (3-275)$$

$$\omega_R^2 \leq \frac{q_1^2 M_1 \omega_n^2 + q_2^2 M_2 \omega_n^2 + \dots + q_n^2 M_n \omega_n^2}{q_1^2 M_1 + q_2^2 M_2 + \dots + q_n^2 M_n} = \omega_n^2 \quad (3-276)$$

Herved haves

$$\omega_1^2 \leq \omega_R^2 \leq \omega_n^2 \quad (3-277)$$

(3-277) betegnes *Rayleighs princip*. ω_R^2 betegnes *Rayleighbrøken*. Tælleren i denne er lig den maksimale potentielle energi, og nævneren gange ω_R^2 er lig den maksimale kinetiske energi, når systemet bevæges harmonisk med amplitudevektoren \mathbf{x} og den cykliske frekvens ω_R .

(3-56) ganges foran med \mathbf{M} , hvilket fører til egenværdiproblemet

$$\mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \Phi^{(i)} = \lambda_i \mathbf{M} \Phi^{(i)}, \quad \lambda_i = \frac{1}{\omega_i^2} \quad (3-278)$$

Nu dannes brøken

$$\lambda_R = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} \quad (3-279)$$

(3-272) indsættes i (3-279). Ved (3-137) og (3-266) findes

$$\lambda_R = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i q_j \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \Phi^{(j)}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i q_j \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \Phi^{(j)}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q_1^2 M_1 \frac{1}{\omega_1^2} + q_2^2 M_2 \frac{1}{\omega_2^2} + \cdots + q_n^2 M_n \frac{1}{\omega_n^2}}{q_1^2 M_1 + q_2^2 M_2 + \cdots + q_n^2 M_n} \\
&\leq \frac{q_1^2 M_1 \frac{1}{\omega_1^2} + q_2^2 M_2 \frac{1}{\omega_1^2} + \cdots + q_n^2 M_n \frac{1}{\omega_1^2}}{q_1^2 M_1 + q_2^2 M_2 + \cdots + q_n^2 M_n} = \frac{1}{\omega_1^2} \Rightarrow \\
\omega_1^2 &\leq \frac{1}{\lambda_R} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{x}} \quad (3-280)
\end{aligned}$$

(3-280) angiver en alternativ formulering af Rayleighs princip, udtrykt ved deformationsmatricen \mathbf{D} .

Rayleighs brøk benyttes til at beregne en tilnærmet værdi for den 1. cykliske egenfrekvens. Man starter med at skønne en passende belastningsvektor \mathbf{f} , hvorefter \mathbf{x} beregnes af (3-271). ω_R^2 beregnes dernæst af (3-273) eller (3-280).

Eksempel 3-11: Bestemmelse af laveste egenfrekvens af 2 frihedsgraders system ved Rayleighs brøk

Systemet er defineret i figur 3-5, og stivheds- og massematrix er givet ved (3-40).

For belastningsvektoren skønnes $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, hvorved

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-281)$$

Af (3-273) findes

$$\omega_R^2 = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{2k}{3m} \quad (3-282)$$

Ved sammenligning med (3-61) haves

$$\omega_1^2 = 0.634 \frac{k}{m} < \omega_R^2 = 0.667 \frac{k}{m} < \omega_2^2 = 2.366 \frac{k}{m} \quad (3-283)$$

Den benyttede belastningsvektor afviger en del fra den eksakte, hvor $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 1 \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(7-3\sqrt{3}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.902 \\ 1 \end{bmatrix}$. Alligevel er den skønnede cykliske egenfrekvens (3-282) tilstrækkelig nøjagtig.

3.11 Svingninger fremkaldt af bevægelser af understøtningerne

Bygningssvingninger fremkaldt ved bevægelser af understøtningerne har stor praktisk betydning. Ved jordskælv er der således risiko for, at konstruktionen herved bringes i en brudgrænsetilstand.

Deformationskomponenterne for alle konstruktioners understøtningspunkter samles i vektoren $\mathbf{y}(t)$. I det mest generelle tilfælde har hvert understøtningspunkt 3 translationskomponenter og 3 rotationskomponenter. Deformationshistorien $\mathbf{y}(t)$ antages givet.

Først bestemmes de *kvasistatiske deformationer* $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ af massepunkterne fra deformationen $\mathbf{y}(t)$ af understøtningerne, dvs. deformationerne svarende til at inertikræfterne ignoreres. På grund af lineariteten gælder

$$\mathbf{x}^{(0)}(t) = \mathbf{U}\mathbf{y}(t) \quad (3 - 284)$$

Influensmatricen \mathbf{U} kan bestemmes ved sædvanlige fleksibilitetsmetoder. \mathbf{U} er geometrisk bestemt, når konstruktionen er statisk bestemt.

Lad $\mathbf{x}(t)$ betegne de totale flytninger af massepunkterne. $\mathbf{x}(t)$ udgøres af $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ plus flytningen fremkaldt af inertikræfterne, dvs.

$$x_i(t) = x_i^{(0)}(t) + \sum_{j=1}^n \delta_{ij}(-m_j \ddot{x}_j) \quad (3 - 285)$$

Eller på matrixform

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}^{(0)}(t) - \mathbf{D}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} \Rightarrow \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} &= \mathbf{K}\mathbf{x}^{(0)}(t) = \mathbf{K}\mathbf{U}\mathbf{y}(t) \end{aligned} \quad (3 - 286)$$

De relative flytninger af massepunkterne i forhold til de kvasistatiske deformationer $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ defineres ved

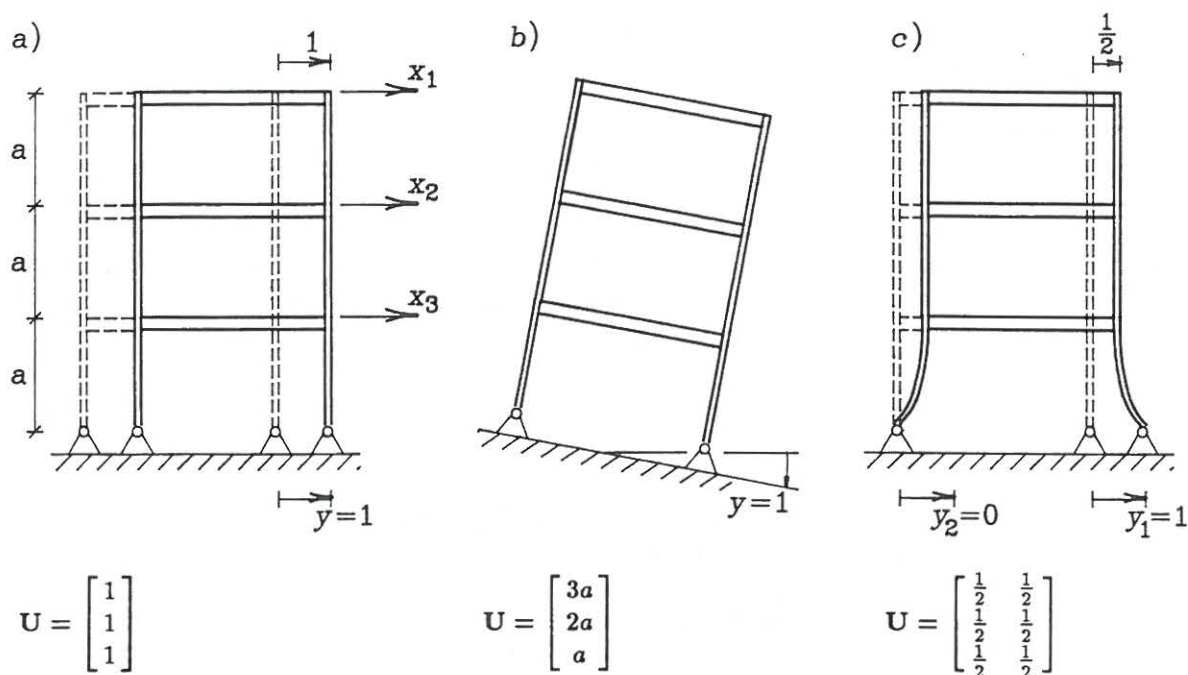
$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^{(0)}(t) \quad (3 - 287)$$

Ved (3-284), (3-287) kan (3-286) skrives

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}^{(0)}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{U}\ddot{\mathbf{y}}(t) \quad (3 - 288)$$

Ligningssystemerne (3-286) og (3-288) for de lokale og de relative flytninger er herved bragt på standardformen (3-36) med henholdsvis $\mathbf{f}(t) = \mathbf{K}\mathbf{U}\mathbf{y}(t)$ og $\mathbf{f}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{U}\ddot{\mathbf{y}}(t)$, og kan løses ved de i denne forbindelse indførte metoder.

Eksempel 3-12:



Figur 3-9: Bevægelser af understøtninger af 3 etagers ramme.

Den i eksempel 3-1 beskrevne 3-etagers ramme påvirkes af forskellige deformationer af understøtningspunkterne. I eksempel a) får begge understøtningspunkter samme vandrette flytning y i rammens symmetriplan. I eksempel b) undergår hele fundamentet en rotation som et stift legeme. I eksempel c) får understøtningspunkterne forskellige vandrette flytninger y_1 og y_2 i rammens symmetriplan.

De gældende influensmatricer for de 3 tilfælde er anført under figurene.

Antag bevægelsen af understøtningen er harmonisk

$$y(t) = \text{Re}(Y e^{i\omega t}) \quad (3-289)$$

Den stationære totale flytning $x(t)$ og den stationære relative bevægelse $z(t)$ bliver da også harmoniske. Disse søges på formen

$$x(t) = \text{Re}(X e^{i\omega t}) \quad (3-290)$$

$$z(t) = \text{Re}(Z e^{i\omega t}) \quad (3-291)$$

Ved indsætning af (3-290) i (3-286) findes ved den sædvanlige argumentation

$$\text{Re} \left([(-\omega^2 M + K)X - KUY] e^{i\omega t} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$X = H(\omega)KUY \quad (3-292)$$

$$\mathbf{H}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \quad (3-293)$$

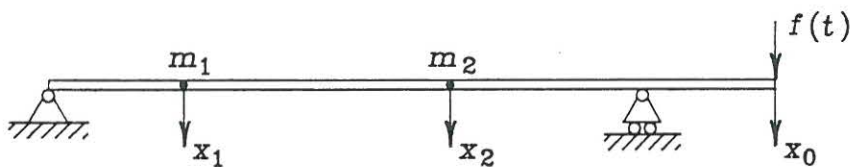
Tilsvarende findes ved indsætning af (3-291) i (3-288)

$$\operatorname{Re} \left([(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{Z} - \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{U}\mathbf{Y}] e^{i\omega t} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{Z} = \omega^2 \mathbf{H}(\omega) \mathbf{M}\mathbf{U}\mathbf{Y} \quad (3-294)$$

Frekvensresponsmatricen (3-293) er i dette tilfælde reel, da systemet er udæmpet. $\mathbf{H}(\omega)$ kan enten udregnes direkte af (3-293) eller modaludviklingen (3-173), (3-174) kan benyttes. \mathbf{X} og \mathbf{Z} bliver reel, hvis \mathbf{Y} er reel, dvs. hvis påvirkningens komponenter er i fase.

3.12 Indirekte påvirkning



Figur 3-10: Indirekte påvirkning af multifrihedsgraders system.

Hidtil er antaget, at de ydre belastninger angriber ved konstruktionens masser. I dette afsnit undersøges tilfældet, hvor en enkelt ydre kraft $f(t)$ påvirker massesystemet indirekte, se figur 3-10, med henblik på at bestemme flytningerne x_1, \dots, x_n af masserne m_1, \dots, m_n , og flytningen x_0 af kraftens angrebepunkt.

Flytningen x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ frembringes som en sum af flytningsbidrag fra den ydre kraft $f(t)$ og fra inertikræfterne $-m_i \ddot{x}_i$ virkende ved masserne

$$x_0(t) = \delta_{00} f(t) + \delta_{01} (-m_1 \ddot{x}_1) + \dots + \delta_{0n} (-m_n \ddot{x}_n) \quad (3-295)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \delta_{10} f(t) + \delta_{11} (-m_1 \ddot{x}_1) + \dots + \delta_{1n} (-m_n \ddot{x}_n) \\ \vdots \\ x_n(t) &= \delta_{n0} f(t) + \delta_{n1} (-m_1 \ddot{x}_1) + \dots + \delta_{nn} (-m_n \ddot{x}_n) \end{aligned} \right\} \quad (3-296)$$

På matrixform kan (3-295), (3-296) skrives

$$x_0(t) = \delta_{00} f(t) - \mathbf{d}_0^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} \quad (3-297)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{d}_0 f(t) - \mathbf{D} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} \quad (3-298)$$

hvor

$$\mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \vdots \\ \delta_{n0} \end{bmatrix} \quad (3-299)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (3-300)$$

Ved multiplikation foran med $\mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1}$ kan (3-298) skrives

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{K}\mathbf{d}_0 f(t) \quad (3-301)$$

(3-301) er herved bragt på standardformen (3-36) med $\mathbf{f}(t) = \mathbf{K}\mathbf{d}_0 f(t)$. Man starter med at løse (3-301), hvorefter $x_0(t)$ bestemmes af (3-298).

Antag $f(t)$ er harmonisk varierende på formen

$$f(t) = F \cos \omega t \quad (3-302)$$

Systemet er udæmpet. Frekvensresponsmatricen bliver da, jf. (3-173), (3-174)

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi^{(j)} \Phi^{(j)T}}{M_j(\omega_j^2 - \omega^2)} \quad (3-303)$$

Den stationære harmoniske bevægelse bestemmes af (3-91), (3-92) med $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{d}_0 F$. Ved (3-303) findes

$$\mathbf{x}(t) = \text{Re}(\mathbf{X} e^{i\omega t}) \quad (3-304)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{K}\mathbf{d}_0 F = F \sum_{j=1}^n \frac{\Phi^{(j)T} \mathbf{K}\mathbf{d}_0}{M_j(\omega_j^2 - \omega^2)} \Phi^{(j)} \quad (3-305)$$

Den stationære harmoniske bevægelse af kraftens angrebspunkt bliver ved indsætning af (3-302), (3-304), (3-305) i (3-297)

$$x_0(t) = X_0 \cos \omega t \quad (3-306)$$

$$X_0(\omega) = F \left(\delta_{00} + \omega^2 \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{d}_0^T \mathbf{M} \Phi^{(j)} \Phi^{(j)T} \mathbf{K}\mathbf{d}_0}{M_j(\omega_j^2 - \omega^2)} \right) \quad (3-307)$$

Ved benyttelse af frekvensbetingelsen $\Phi^{(j)T} \mathbf{K} = \omega_j^2 \Phi^{(j)T} \mathbf{M}$ kan (3-307) skrives

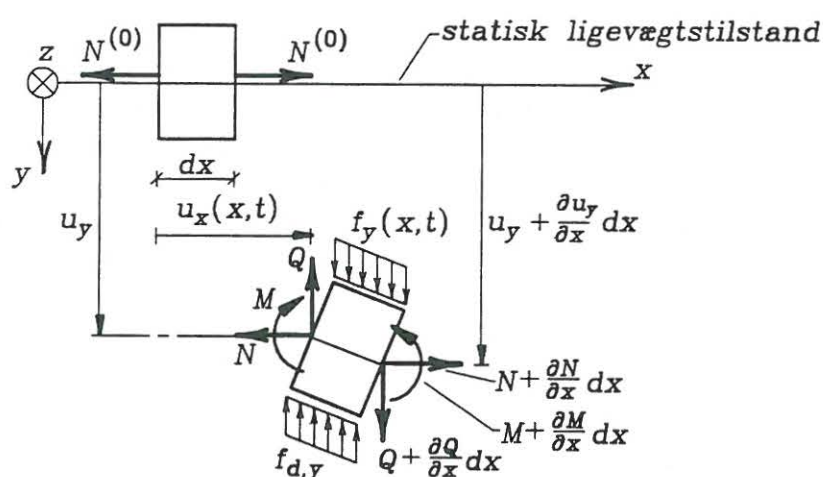
$$X_0(\omega) = F \left(\delta_{00} + \omega^2 \sum_{j=1}^n \frac{(\mathbf{d}_0^T \mathbf{M} \Phi^{(j)})^2}{M_j \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\right)} \right) \quad (3-308)$$

4. SVINGNINGER AF BJÆLKEKONSTRUKTIONER

Bjælkekonstruktioner er kontinuerte systemer. Disse behandles separat som følge af deres vigtighed, og fordi det er muligt på relativt simpel vis at illustrere karakteristiske egenskaber for kontinuerte systemer.

I det følgende betragtes alene plane Bernoulli-Eulerbjælker med retliniet akse. Endvidere antages samtlige bjælkeelementer uendeligt stive over for aksialdeformationer.

4.1 Bevægelsesligninger for bjælkeelement



Figur 4-1: Tvungne, dæmpede svingninger af bjælkeelement.

Der indlægges et lokalt (x, y, z) -koordinatsystem i bjælkeelementet. Origo O placeres ved bjælkens ene endtværsnit, x -aksen er sammenfaldende med linien gennem bøjningscentrene i den statiske ligevægtstilstand, og (x, y) -planen er sammenfaldende med konstruktionsplanen. Idet bjælkeelementets længde er l , får det andet endtværsnits bøjningscenter herved koordinaten $(x, y, z) = (l, 0, 0)$.

I figur 4-1 er vist et differentielt bjælkeelement af længden dx i såvel den statiske ligevægtstilstand som den deformerede tilstand. Elementet er skåret fri, idet de indre snitkræfter er påført elementet i de 2 tilstande. Forkortet refereres i det følgende til elementets snitflader ved abscisserne x og $x + dx$ som henholdsvis venstre og højre snitflade.

Flytningen af bøjningscentret fra den statiske ligevægtstilstand ved venstre endepunkt er $(u_x(x, t), u_y(x, t))$ i henholdsvis x - og y -aksens retning. De tilsvarende flytninger ved højre endepunkt er $(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx, u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx)$.

I den statiske ligevægtstilstand virker en normalkraft $N^{(0)}$, regnet positiv som træk. $N^{(0)}$ antages uafhængig af tiden og konstant i størrelse langs bjælken.

I den deformerede tilstand virker belastningerne pr. længdeenhed $f_x(x, t)$ og $f_y(x, t)$ i henholdsvis x - og y -aksens retning. Inertibelastningerne pr. længdeenhed $-\mu(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_x(x, t)$ og $-\mu(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_y(x, t)$ indregnes i disse i henhold til d'Alemberts princip. Egentlige ydre dynamiske belastninger pr. længdeenhed antages kun at virke i y -aksens retning. Herved fås

$$f_x(x, t) = -f_{x,d} - \mu(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_x(x, t) \quad (4-1)$$

$$f_y(x, t) = f_y^{(d)}(x, t) - f_{y,d} - \mu(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_y(x, t) \quad (4-2)$$

$f_y^{(d)}(x, t)$ er den ydre dynamiske belastning pr. længdeenhed i y -aksens retning, og $f_{x,d}, f_{y,d}$ er dæmpningsbelastningen pr. længdeenhed i x - og y -retningen, regnet positiv i x - og y -aksens negative retninger, se figur 4-1. $\mu(x)$ er massen pr. længdeenhed af bjælken.

I den deformerede tilstand virker på venstre snitflade snitkraftkomposanterne N og Q , regnet positive i henholdsvis x - og y -aksens negative retninger, se figur 4-1. Desuden er snitfladen påvirket af et bøjningsmoment M , regnet positiv i z -aksens positive retning. På højre snitflade er disse størrelser ændret differentielt til $N + \frac{\partial N}{\partial x} dx$, $Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx$, $M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$, alle regnet positive i modsat retning af de tilsvarende størrelser på venstre snitflade.

Dynamiske bevægelsesligninger opstilles herefter ved at udtrykke kraftligevægt i x - og y -aksens retninger og momentligevægt om z -aksen for det fritskårne differentielle bjælkeelement, på samme måde som i det statiske tilfælde.

Som geometrisk betingelse benyttes, at plane tværsnit forbliver plane, svarende til Bernoulli-Eulerteorien. Elasticitetsmodulet er E , og bøjningsinertimomentet om z -aksen er I . Herved haves følgende feltligninger¹

Statiske betingelser:

$$\frac{\partial N}{\partial x} + f_x(x, t) = 0 \quad (4-3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + f_y(x, t) = 0 \quad (4-4)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q + N \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \quad (4-5)$$

Geometriske og fysiske betingelser:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad (4-6)$$

¹ M. P. Nielsen og L. Pilegaard Hansen: Mekanik 3.3, Del 1. Spændinger og deformationer i rumbjælker, Den private Ingeniørfond (1978).

$$M = -EI \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \quad (4-7)$$

(4-6) udtrykker, at bjælken er usammentrykkelig i x -retningen, og indebærer $u_x(x, t) = u_x(t)$. Ved (4-4), (4-5) haves ved elimination af Q

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N(x, t) \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + f_y(x, t) = 0 \quad (4-8)$$

$N(x, t)$ i (4-8) er givet ved (4-3). Da $f_x(x, t)$ i henhold til (4-1) er bestemt af $u_x(x, t)$, og derfor er ignorabel ved små flytninger ud fra den statiske ligevægtstilstand, kan $N(x, t)$ i (4-8) erstattes med den statiske referenceværdi $N^{(0)}$. Ved (4-2), (4-7), (4-8) findes følgende partielle differentialligning for bevægelsen i y -retningen

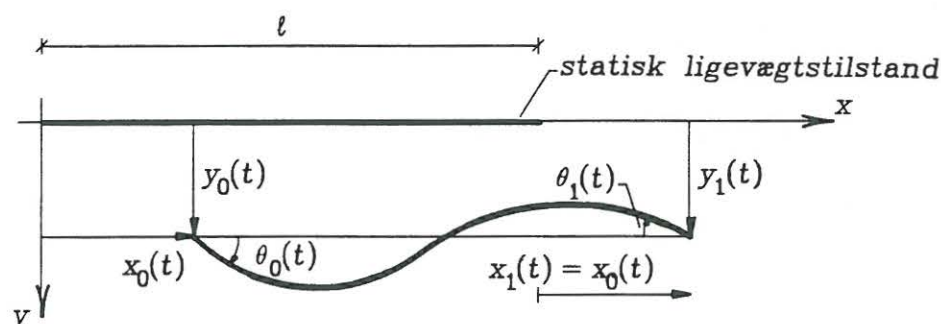
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(N^{(0)} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + f_{y,d} + \mu(x) \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = f_y^{(d)}(x, t) \quad (4-9)$$

(4-9) skal løses mht. givne rand- og begyndelsesbetingelser, der formuleres i det følgende.

Begyndelsesbetingelserne fastlægges ved en given flytning $u_{y,0}(x)$ og hastighed $\dot{u}_{y,0}(x)$ af alle massepartikler til tiden $t = 0$

$$u_y(x, 0) = u_{y,0}(x), \quad \dot{u}_y(x, 0) = \dot{u}_{y,0}(x), \quad x \in]0, l[\quad (4-10)$$

Randbetingelserne er dels *geometriske*, dels *mekaniske*.



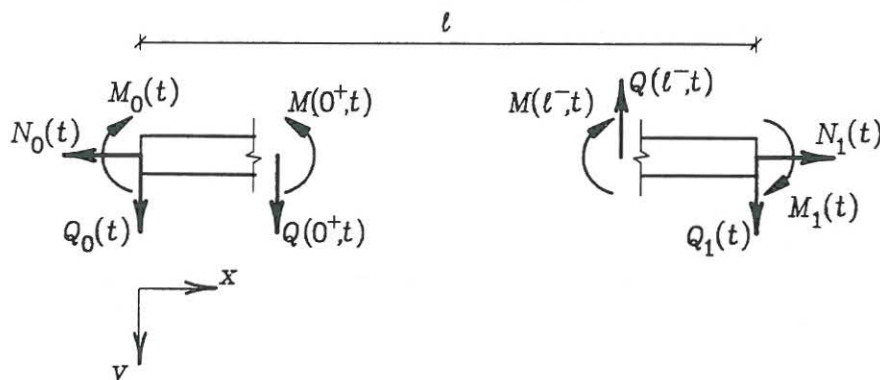
Figur 4-2: Geometriske randbetingelser.

Geometriske randbetingelser indebærer, at der ved bjælkens endetværsnit er foreskrevet givne flytninger $x_0(t)$, $x_1(t)$ i x -retningen, flytninger $y_0(t)$, $y_1(t)$ i y -retningen og rotationer $\theta_0(t)$, $\theta_1(t)$ i z -retningen. Da bjælken er usammentrykkelig i x -aksens retning, må gælde

$$x_0(t) = x_1(t) = u_x(x, t) \quad (4-11)$$

Ved bevægelser i y -aksens retning haves randbetingelserne

$$\left. \begin{aligned} u_y(0, t) = y_0(t) & \quad , \quad u_y(l, t) = y_1(t) \\ \frac{\partial}{\partial x} u_y(0, t) = \theta_0(t) & \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} u_y(l, t) = \theta_1(t) \end{aligned} \right\} , \quad t > 0 \quad (4-12)$$



Figur 4-3: Mekaniske randbetingelser.

Mekaniske randbetingelser svarer til, at der ved bjælkens endetværsnit $x = 0$ og $x = l$ virker givne ydre kræfter $Q_0(t)$, $Q_1(t)$ i y -aksens positive retning og momenter $M_0(t)$, $M_1(t)$ langs z -retningen. Fortegnet for de anførte randbelastninger er defineret i figur 4-3. Specielt er $M_0 = M_1 = 0$ ved faste simple understøtninger, og $Q_0 = M_0 = 0$ og $Q_1 = M_1 = 0$ ved frie ubelastede rande. Snitkræfterne for $x = 0^+$ og $x = l^-$ skal være i ligevægt med randbelastningerne. Herved haves, se figur 4-3

$$\left. \begin{aligned} Q(0^+, t) = -Q_0(t) & \quad , \quad Q(l^-, t) = Q_1(t) \\ M(0^+, t) = M_0(t) & \quad , \quad M(l^-, t) = -M_1(t) \end{aligned} \right\} , \quad t > 0 \quad (4-13)$$

For differentialligningen (4-9) skal opfyldes 2 af de 4 ved (4-12) og (4-13) specificerede geometriske eller mekaniske randbetingelser ved henholdsvis randtværsnittene $x = 0$ og $x = l$.

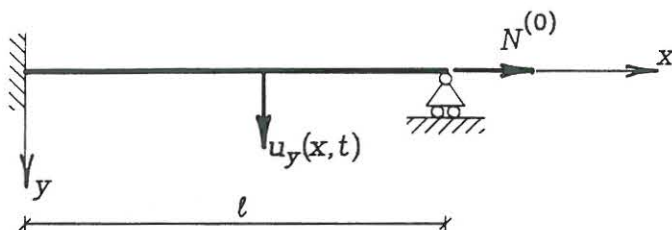
I (4-5) lineariseres leddet $N \frac{\partial u_y}{\partial x}$, svarende til at N erstattes med $N^{(0)}$. Ved anvendelse heraf og anvendelse af (4-7) kan (4-13) udtrykkes i flytningen u_y

$$\left. \begin{aligned} -EI(0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_y(0, t) &= M_0(t) \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(EI(0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_y(0, t) \right) + N^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} u_y(0, t) &= -Q_0(t) \end{aligned} \right\} , \quad t > 0 \quad (4-14)$$

$$\left. \begin{aligned} -EI(l) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_y(l, t) &= -M_1(t) \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(EI(l) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_y(l, t) \right) + N^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} u_y(l, t) &= Q_1(t) \end{aligned} \right\} , \quad t > 0 \quad (4-15)$$

De geometriske randbetingelser (4-12) kaldes *homogene*, når højresiderne er identisk lig 0. Tilsvarende betegnes de mekaniske randbetingelser (4-14), (4-15) *homogene*, når højresiderne er lig 0.

Eksempel 4-1: Fast indspændt, bevægelig simpelt understøttet bjælke



Figur 4-4: Fast indspændt, bevægelig simpelt understøttet bjælke.

Flytningen $u_y(x, t)$ ud fra den statiske ligevægtstilstand af det i figur 4-4 viste bjælkeelement skal tilfredsstille følgende randbetingelser:

Geometriske randbetingelser:

$$u_y(0, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} u_y(0, t) = 0, \quad u_y(l, t) = 0 \quad (4-16)$$

Mekaniske randbetingelser:

$$-EI(l) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_y(l, t) = 0 \quad (4-17)$$

Samtlige geometriske og mekaniske randbetingelser er *homogene*.

Dæmpningsbelastningerne pr. længdeenhed $f_{x,d}$ og $f_{y,d}$ antages i det følgende udelukkende forårsaget af dissipation i materialet. Dette forudsætter tøjninger i strukturen. Som følge af (4-6) antages derfor om dæmpningsbelastningen i x -retningen

$$f_{x,d}(x, t) \equiv 0 \quad (4-18)$$

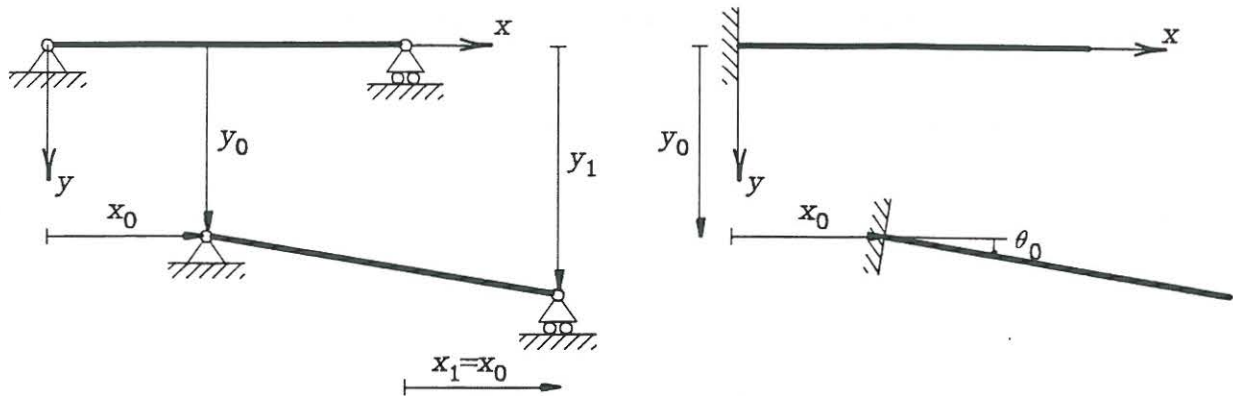
Ved indsætning af (4-1), (4-18) i (4-3) og efterfølgende integration findes

$$N(x, t) = N_0(t) + \ddot{u}_x(t) \int_0^x \mu(u) du, \quad t > 0 \quad (4-19)$$

$N_0(t)$, $N_1(t)$ angiver normalkraften ved henholdsvis venstre og højre rand i den deformerede tilstand og kan foreskrives som statiske randbetingelser, se figur 4-3. I henhold til (4-19) er flytningsfeltet $u_x(x, t) = u_x(t)$ herved bestemt af differentialligningen

$$\ddot{u}_x(t) = \frac{N_1(t) - N_0(t)}{\int_0^l \mu(u) du}, \quad t > 0 \quad (4-20)$$

$\int_0^l \mu(u) du$ angiver den samlede masse af bjælkeelementet. $N_1(t) - N_0(t)$ og $\ddot{u}_x(t)$ er henholdsvis den samlede ydre påvirkning og accelerationen i x -aksens retning. (4-20) udtrykker derfor blot Newtons 2. lov for bevægelser i x -aksens retning.



Figur 4-5: Stivlegemebevægelser fra geometriske randbetingelser.

Dæmpningsbelastningen i y -retningen vil kun blive specificeret for statisk bestemte bjælkeelementer. Såfremt geometriske randbetingelser (4-12) er foreskrevet, eksisterer i dette tilfælde en bøjningsmomentfri stivlegemebevægelse $u_y^{(0)}(x, t)$, der opfylder samtlige geometriske randbetingelser, se figur 4-5. At stivlegemebevægelsen er bøjningsmomentfri indebærer, at denne er en lineær funktion af x

$$u_y^{(0)}(x, t) = a_0(t) + a_1(t)x, \quad x \in]0, l[\quad (4-21)$$

Tøjninger i bjælkeelementet forårsages herved af differensflytningsfeltet $(u_y(x, t) - u_y^{(0)}(x, t))$. Som følge heraf antages $f_{d,y}(x, t)$ på formen

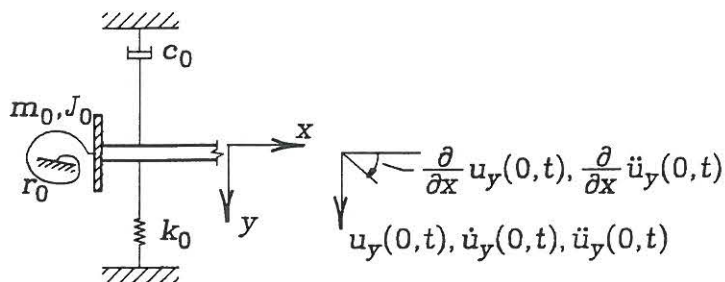
$$f_{d,y}(x, t) = c(x)(\dot{u}_y(x, t) - \dot{u}_y^{(0)}(x, t)), \quad c(x) > 0 \quad (4-22)$$

Dæmpningsmodellen (4-22) betegnes *lineært viskos*. Ved indsætning af (4-22) i (4-9) findes differentialligningen for lineært viskose bøjningssvingninger af en Bernoulli-Eulerbjælke

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(N^{(0)} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + c(x) \frac{\partial u_y}{\partial t} + \mu(x) \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ & = c(x) \frac{\partial u_y^{(0)}}{\partial t} + f_y^{(d)}(x, t), \quad t > 0 \end{aligned} \quad (4-23)$$

Ofte skyldes de koncentrerede kræfter $Q_0(t), Q_1(t)$ og momenter $M_0(t), M_1(t)$ på randtværsnittene inertibelastninger fra koncentrerede masser eller masseinertimomenter, eller skyldes indre dæmper- og fjederkræfter, der påføres, idet bjælken skæres fri fra dæmper-

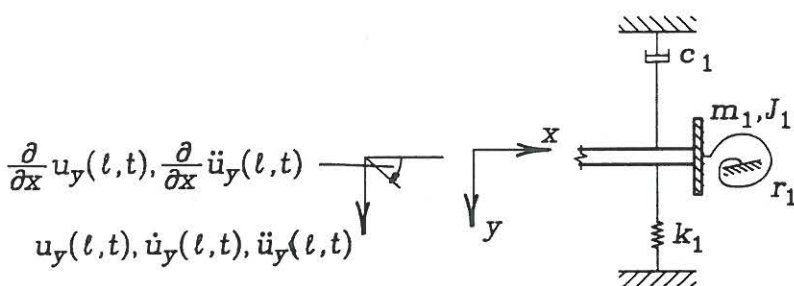
og fjederelementerne. Eksempler på forekomsten af sådanne koncentrerede påvirkningsselementer ved givne modelantagelser er givet i eksempel 4-2.



Figur 4-6: Mekaniske randbetingelser ved bjælkeranden $x = 0$ pga. koncentrerede masser, dæmpere og fjedre.

Figur 4-6 viser et snit i bjælken ved randen $x = 0$, hvor der er placeret en udbredt masse med massen m_0 og masseinertimomentet J_0 om z -aksen. I y -aksens retning virker et lineær viskøst dæmpningselement med dæmpningskonstanten c_0 og en lineær elastisk translationsfjeder med fjederstivheden k_0 . Endelig er placeret en rotationsfjeder med rotationsfjederstivheden r_0 . Ved d'Alemberts princip findes herved følgende udtryk for de koncentrerede belastninger $Q_0(t)$, $M_0(t)$ på højresiden af (4-14), (4-15)

$$\left. \begin{aligned} Q_0(t) &= -k_0 u_y(0, t) - c_0 \dot{u}_y(0, t) - m_0 \ddot{u}_y(0, t) \\ M_0(t) &= -r_0 \frac{\partial}{\partial x} u_y(0, t) - J_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_y(0, t) \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-24)$$



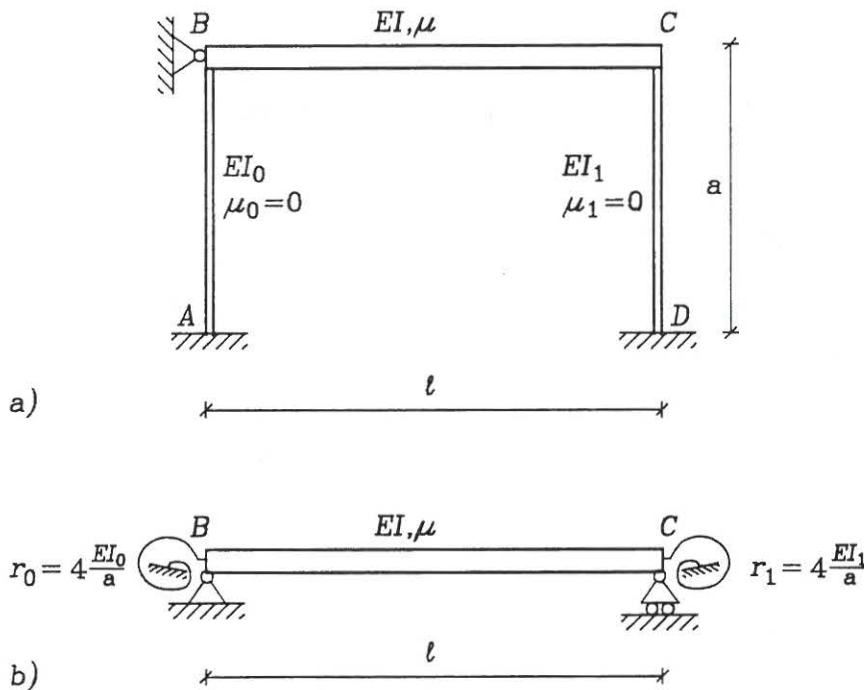
Figur 4-7: Mekaniske randbetingelser ved bjælkeranden $x = l$ pga. koncentrerede masser, dæmpere og fjedre.

Figur 4-7 viser det tilsvarende problem ved randen $x = l$. Med symboler defineret i figuren

findes randbetingelserne

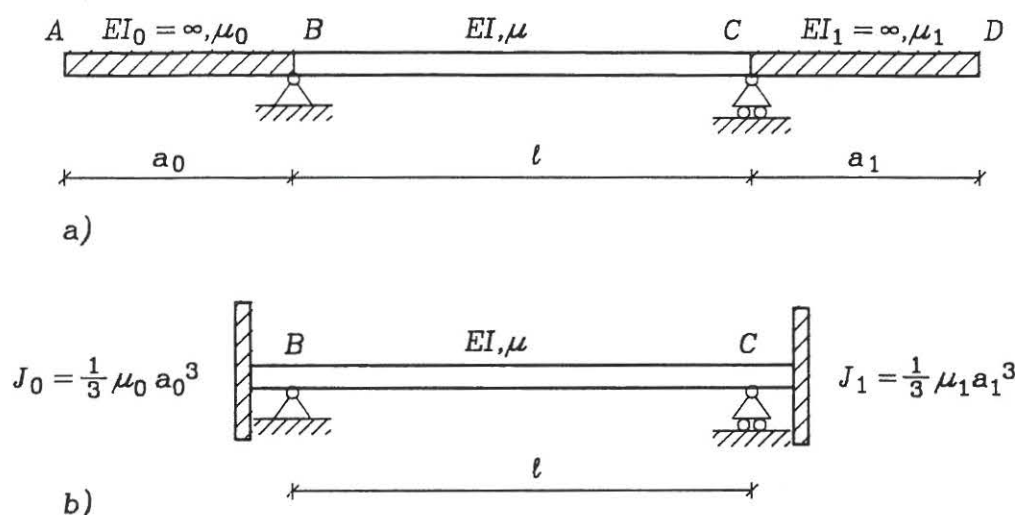
$$\left. \begin{aligned} Q_1(t) &= -k_1 u_y(l, t) - c_1 \dot{u}_y(l, t) - m_1 \ddot{u}_y(l, t) \\ M_1(t) &= -r_1 \frac{\partial}{\partial x} u_y(l, t) - J_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_y(l, t) \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-25)$$

Eksempel 4-2: Eksempler på koncentrerede påvirkningselementer



Figur 4-8: a) Plan 1-etages rammekonstruktion med masseløse søjler. b) Ækvivalent system.

Den plane ramme i figur 4-8a består af søjlerne AB , CD og bjælken BC . Søjlerne af længden a er fast indspændt i punkterne A og D . Bevægelser af rammen i bjælken BC 's længderetning er forhindret ved en fast simpel understøtning i punkt B . Søjlerne AB og CD antages homogene med bøjningsstivhederne EI_0 og EI_1 . Hvis massen af søjlerne kan forudsættes ignorabel sammenlignet med massen af bjælken BC , kan søjlerne ækvivaleres ved lineære, dæmpningsfri rotationsfjedre med fjederkonstanterne $r_0 = 4 \frac{EI_0}{a}$ og $r_1 = 4 \frac{EI_1}{a}$. Udæmpede egensvingninger af rammekonstruktionen kan herved analyseres ved hjælp af det i figur 4-8b viste ækvivalente system.



Figur 4-9: a) Plan simpelt understøttet bjælke med uendeligt stive udkragninger. b) Ækvivalent system.

Den plane bjælkekonstruktion i figur 4-9a består af bjælkerne AB , BC og CD . Bjælkerne er bøjningsstift forbundet i punkterne B og C , hvor konstruktionen er simpelt understøttet. Bjælkerne AB og CD af længderne a_0 og a_1 er homogene med bøjningsstivhederne EI_0 og EI_1 og masserne pr. længdeenhed μ_0 og μ_1 . Hvis bøjningsstivheden EI af bjælke BC kan forudsættes ignorabel sammenlignet med bøjningsstivhederne EI_0 og EI_1 , kan de dynamiske virkninger af de udkragede bjælker AB og CD ækvivaleres med udbredte masser i punkterne B og C med masseinertimomenterne $J_0 = \frac{1}{3}\mu_0 a_0^3$ og $J_1 = \frac{1}{3}\mu_1 a_1^3$ om en linie vinkelret på konstruktionsplanen gennem bøjningscentrene i B og C . Udæmpede egensvingninger af konstruktionen kan herved analyseres ved hjælp af det i figur 4-9b viste ækvivalente system. I figur 4-9a er den sammensatte bjælke $ABCD$ antaget retliniet. Det ækvivalente system 4-9b gælder imidlertid, uanset hvilken vinkel bjælkerne AB og CD danner med bjælke BC .

4.2 Udæmpede bøjningsegensvingninger af bjælkeelementer

Differentialligningen for udæmpede bøjningsegensvingninger af bjælkeelementet følger af (4-23) for $c(x) \equiv 0$, $f_y^{(d)}(x, t) \equiv 0$.

I de geometriske randbetingelser (4-12) antages alle tvangsflytninger lig 0, dvs. $y_0(t) = y_1(t) = \theta_0(t) = \theta_1(t) \equiv 0$.

I de mekaniske randbetingelser (4-14), (4-15) må der i randbelastningerne ikke indgå egentlige ydre belastninger eller koncentrerede dæmpningskræfter. Heraf følger, at $Q_0(t)$, $Q_1(t)$, $M_0(t)$, $M_1(t)$ er givet ved (4-24), (4-25) med $c_0 = c_1 = 0$. Udæmpede egensvingninger fremkommer herved som løsningen til randværdiproblemet

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(N^{(0)} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \mu(x) \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0$$

Geometriske randbetingelser:

$$u_y(0, t) = 0 \quad , \quad u_y(l, t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_y(0, t) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} u_y(l, t) = 0$$

Mekaniske randbetingelser:

$$-EI(0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_y(0, t) = -r_0 \frac{\partial}{\partial x} u_y(0, t) - J_0 \frac{\partial}{\partial x} \ddot{u}_y(0, t)$$

$$-EI(l) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_y(l, t) = r_1 \frac{\partial}{\partial x} u_y(l, t) + J_1 \frac{\partial}{\partial x} \ddot{u}_y(l, t)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(EI(0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_y(0, t) \right) + N^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} u_y(0, t) = k_0 u_y(0, t) + m_0 \ddot{u}_y(0, t)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(EI(l) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_y(l, t) \right) + N^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} u_y(l, t) = -k_1 u_y(l, t) - m_1 \ddot{u}_y(l, t)$$

, $t > 0$

(4 - 26)

Løsningen til (4-26) søges på formen

$$u_y(x, t) = \Phi(x) \cos \omega t \quad (4 - 27)$$

Ved indsætning ses, at (4-27) er en løsning, hvis og kun hvis $\Phi(x)$ er løsning til følgende lineære egenværdiproblem, der er illustreret i figur 4-10

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 \Phi}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(N^{(0)} \frac{d\Phi}{dx} \right) - \omega^2 \mu(x) \Phi = 0$$

Geometriske randbetingelser:

$$\Phi(0) = 0 \quad , \quad \Phi(l) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \Phi(0) = 0 \quad , \quad \frac{d}{dx} \Phi(l) = 0$$

Mekaniske randbetingelser:

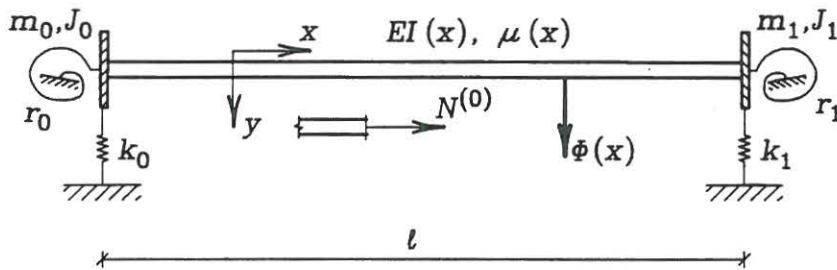
$$EI(0) \frac{d^2}{dx^2} \Phi(0) = (r_0 - \omega^2 J_0) \frac{d}{dx} \Phi(0)$$

$$EI(l) \frac{d^2}{dx^2} \Phi(l) = -(r_1 - \omega^2 J_1) \frac{d}{dx} \Phi(l)$$

$$\frac{d}{dx} \left(EI(0) \frac{d^2}{dx^2} \Phi(0) \right) - N^{(0)} \frac{d}{dx} \Phi(0) = -(k_0 - \omega^2 m_0) \Phi(0)$$

$$\frac{d}{dx} \left(EI(l) \frac{d^2}{dx^2} \Phi(l) \right) - N^{(0)} \frac{d}{dx} \Phi(l) = (k_1 - \omega^2 m_1) \Phi(l)$$

(4-28)



Figur 4-10: Definition af parametre i egenværdiproblem.

De mekaniske randbetingelser for en fri rand følger af (4-28) ved at sætte $k_0 = r_0 = m_0 = J_0 = 0$ eller $k_1 = r_1 = m_1 = J_1 = 0$.

Amplitdefunktionen $\Phi(x)$ skal opfylde 2 af de 4 specificerede geometriske eller mekaniske randbetingelser ved henholdsvis randtværsnittene $x = 0$ og $x = l$.

(4-28) er åbenbart tilfredsstillet af den trivielle løsning $\Phi(x) \equiv 0$. Løsningsmængden til egenværdiproblemet afhænger af parameteren ω . For diskrete værdier $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots$ eksisterer ikke-trivielle løsninger $\Phi^{(1)}(x), \Phi^{(2)}(x), \dots$ til (4-28). $\omega_1, \omega_2, \dots$ angiver bjælkens *udæmpede cykliske egenfrekvenser*. De tilhørende løsninger $\Phi^{(1)}(x), \Phi^{(2)}(x), \dots$ betegnes

bjælkens *udæmpede egensvingningsformer*. De cykliske egenfrekvenser forudsættes i det følgende ordnet således, at $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots$.

Der findes uendeligt mange udæmpede cykliske egenfrekvenser. Denne egenskab karakteriserer bjælken og andre kontinuerte systemer i forhold til diskrete systemer med n frihedsgrader. Dette forhold vil blive nærmere omtalt i forbindelse med den generelle omtale af kontinuerte systemer i afsnit 5.

Hvis $\Phi^{(i)}(x)$ er en ikke-triviel løsning til (4-28), er også $c\Phi^{(i)}(x)$ en løsning. De udæmpede egensvingningsformer er således bestemt på nær en vilkårlig faktor.

(4-28) løses i det følgende for specialtilfældet, hvor EI og μ er konstante. Herved kan differentialligningen i (4-28) skrives

$$\frac{d^4 \Phi}{d\xi^4} - \frac{N^{(0)}l^2}{EI} \frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} - \frac{\mu\omega^2 l^4}{EI} \Phi = 0 \quad (4-29)$$

hvor

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (4-30)$$

Den fuldstændige løsning til (4-29) kan skrives

$$\Phi(x) = A \sin \lambda \frac{x}{l} + B \cos \lambda \frac{x}{l} + C \sinh \nu \frac{x}{l} + D \cosh \nu \frac{x}{l}, \quad x \in [0, l] \quad (4-31)$$

hvor A, B, C, D er integrationskonstanter, og λ^2 og ν^2 er de positive rødder i ligningerne

$$\left. \begin{aligned} \lambda^4 + \frac{N^{(0)}l^2}{EI} \lambda^2 - \frac{\mu\omega^2 l^4}{EI} &= 0 \\ \nu^4 - \frac{N^{(0)}l^2}{EI} \nu^2 - \frac{\mu\omega^2 l^4}{EI} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-32)$$

Er specielt $N^{(0)} = 0$, reduceres (4-31), (4-32) til

$$\Phi(x) = A \sin \lambda \frac{x}{l} + B \cos \lambda \frac{x}{l} + C \sinh \lambda \frac{x}{l} + D \cosh \lambda \frac{x}{l}, \quad x \in [0, l] \quad (4-33)$$

$$\lambda^4 = \frac{\mu\omega^2 l^4}{EI} \quad (4-34)$$

(4-31) eller (4-33) indsættes i de 4 gældende randbetingelser i (4-28). Herved fremkommer 4 homogene lineære ligninger til bestemmelse af A, B, C, D , der altid kan ordnes på formen

$$\mathbf{K}(\lambda, \nu) \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-35)$$

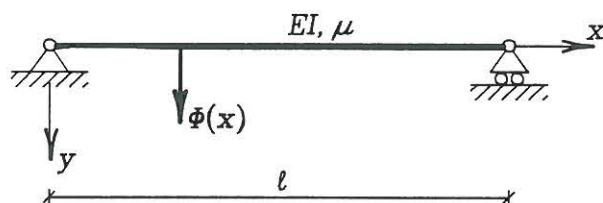
$K(\lambda, \nu)$ bliver via parametrene λ, ν en kendt funktion af den cykliske frekvens ω , dvs. $K = K(\omega)$.

(4-35) har altid løsningen $[A, B, C, D] = [0, 0, 0, 0]$, der ved indsætning i (4-31) eller (4-33) bevirker den trivielle løsning $\Phi(x) \equiv 0$. Den nødvendige betingelse for ikke-trivielle løsninger $[A, B, C, D] \neq [0, 0, 0, 0]$ og dermed ikke-trivielle egensvingningsformer er, at determinanten af $K(\omega)$ er lig 0. Dette fører til *frekvensbetingelsen*

$$\det(K(\omega)) = 0 \quad (4-36)$$

Løsningerne ω_j , $j = 1, 2, \dots$ til (4-36) bestemmer de udæmpede cykliske egenfrekvenser. For hver af disse eksisterer ikke-trivielle løsninger $[A^{(j)}, B^{(j)}, C^{(j)}, D^{(j)}] \neq [0, 0, 0, 0]$ til (4-35), der sammen med de tilsvarende egenverdier λ_i, ν_j ved indsætning i (4-31) eller (4-33) bestemmer bjælkens udæmpede bøjningsegensvingningsformer $\Phi^{(j)}(x)$.

Eksempel 4-3: Bøjningsegensvingninger af simpelt understøttet bjælke med konstant tværsnit



Figur 4-11: Simpelt understøttet bjælke med konstant tværsnit.

En simpelt understøttet bjælke med konstant tværsnit og med normalkraft $N^{(0)} = 0$ har længden l . Koordinataksens begyndelsespunkt $x = 0$ vælges i venstre endepunkt. Højre endepunkt får herved koordinaten $x = l$.

Randbetingelserne for egensvingningsformerne ved de faste simple understøtninger bliver ved (4-28)

$$\Phi(0) = \frac{d^2}{dx^2} \Phi(0) = 0 \quad (4-37)$$

$$\Phi(l) = \frac{d^2}{dx^2} \Phi(l) = 0 \quad (4-38)$$

Ved indsætning af (4-33) i randbetingelserne (4-37) ved $x = 0$ findes

$$\left. \begin{aligned} B + D &= 0 \\ \frac{\lambda^2}{l^2} (-B + D) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-39)$$

Mulige løsninger til (4-39) opfylder enten $B + D = 0 \wedge \lambda = 0$ eller $B = D = 0$. $B + D = 0 \wedge \lambda = 0$ indebærer ved indsætning i (4-33), at $\Phi(x) \equiv 0$. Følgelig er $\lambda = 0$ ikke en egenverdi. For ikke-trivielle egensvingningsformer gælder derfor $B = D = 0 \wedge \lambda \neq 0$. Under denne betingelse reduceres (4-33) til

$$\Phi(x) = A \sin \lambda \frac{x}{l} + C \sinh \lambda \frac{x}{l} \quad (4-40)$$

Dernæst indsættes (4-40) i randbetingelserne (4-38) ved $x = l$

$$\left. \begin{aligned} A \sin \lambda + C \sinh \lambda &= 0 \\ -A \frac{\lambda^2}{l^2} \sin \lambda + C \frac{\lambda^2}{l^2} \sinh \lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sin \lambda & \sinh \lambda \\ -\frac{\lambda^2}{l^2} \sin \lambda & \frac{\lambda^2}{l^2} \sinh \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-41)$$

Frekvensbetingelsen opnås ved i overensstemmelse med (4-36) at sætte determinanten til koefficientmatricen lig 0. Herved

$$2 \frac{\lambda^2}{l^2} \sin \lambda \sinh \lambda = 0 \quad (4-42)$$

Da $\lambda = 0$ som nævnt ikke er en egenværdi, og da $\sinh \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$, er (4-42) kun opfyldt for

$$\sin \lambda = 0 \Rightarrow \quad (4-43)$$

$$\lambda_j = j\pi, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4-44)$$

De udæmpede cykliske egenfrekvenser følger af (4-34)

$$\omega_j = \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4-45)$$

De tilsvarende udæmpede egenfrekvenser bliver

$$f_j = \frac{\omega_j}{2\pi} = \frac{j^2 \pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4-46)$$

Indsættes (4-43) i (4-41) findes

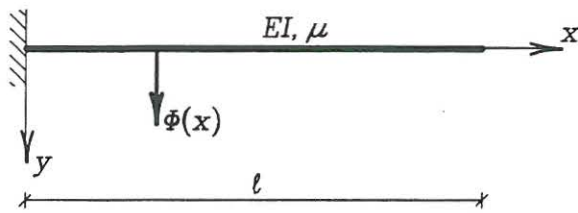
$$\begin{aligned} C \sinh \lambda_j &= 0 \Rightarrow \\ C &= 0 \end{aligned} \quad (4-47)$$

Ved (4-40), (4-44), (4-47) bliver egensvingningsformerne

$$\Phi^{(j)}(x) = A \sin\left(j\pi \frac{x}{l}\right), \quad j = 1, 2, \dots \quad (4-48)$$

Grafen for (4-48) er en sinuskurve med j halvbølger. I grundsvingningen med $j = 1$ er egensvingningsformen en halvbølge af en sinuskurve.

Eksempel 4-4: Bøjningsegensvingninger af fast indspændt, fri bjælke med konstant tværsnit



Figur 4-12: Fast indspændt, fri bjælke med konstant tværsnit.

En bjælke af længden l med konstant tværsnit og med normalkraft $N^{(0)} = 0$ er fast indspændt i den ene ende og fri og ubelastet i den anden. Koordinatsystemets begyndelsespunkt $x = 0$ vælges ved den faste indspænding. Den frie rand får herved koordinaten $x = l$.

De geometriske randbetingelser ved indspændingen bliver, jvf. (4-28)

$$\Phi(0) = \frac{d}{dx}\Phi(0) = 0 \quad (4-49)$$

Randbetingelserne ved den frie rand bliver

$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi(l) = \frac{d^3}{dx^3}\Phi(l) = 0 \quad (4-50)$$

Ved indsætning af (4-33) i (4-49) findes

$$\left. \begin{aligned} B + D &= 0 \\ \frac{\lambda}{l}(A + C) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-51)$$

Mulige løsninger til (4-51) opfylder enten $B + D = 0 \wedge \lambda = 0$ eller $B + D = 0 \wedge A + C = 0$. $B + D = 0 \wedge \lambda = 0$ indebærer ved indsætning i (4-33), at $\Phi(x) \equiv 0$. Følgelig er $\lambda = 0$ ikke en egenverdi. For ikke-trivielle egenverdier gælder derfor $B + D = 0 \wedge A + C = 0 \wedge \lambda \neq 0$. Ved indsætning heraf reduceres (4-33) til

$$\Phi(x) = A \left(\sin \lambda \frac{x}{l} - \sinh \lambda \frac{x}{l} \right) + B \left(\cos \lambda \frac{x}{l} - \cosh \lambda \frac{x}{l} \right) \quad (4-52)$$

Dernæst indsættes (4-52) i (4-50), hvilket fører til det homogene ligningssystem

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\lambda^2}{l^2}(\sin \lambda + \sinh \lambda)A - \frac{\lambda^2}{l^2}(\cos \lambda + \cosh \lambda)B &= 0 \\ -\frac{\lambda^3}{l^3}(\cos \lambda + \cosh \lambda)A - \frac{\lambda^3}{l^3}(-\sin \lambda + \sinh \lambda)B &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sin \lambda + \sinh \lambda & \cos \lambda + \cosh \lambda \\ \cos \lambda + \cosh \lambda & -\sin \lambda + \sinh \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-53)$$

Ved anvendelse af $\cosh^2 \lambda - \sinh^2 \lambda = 1$, $\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda = 1$ bliver frekvensbetingelsen herved

$$\sinh^2 \lambda - \sin^2 \lambda - \cos^2 \lambda - 2 \cos \lambda \cosh \lambda - \cosh^2 \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\cosh \lambda \cos \lambda + 1 = 0 \quad (4-54)$$

De 3 laveste løsninger til (4-54) bliver

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 1.8751041 \\ \lambda_2 &= 4.6940911 \\ \lambda_3 &= 7.8547574 \end{aligned} \right\} \quad (4-55)$$

De tilsvarende cykliske egenfrekvenser følger derefter af (4-34)

$$\omega_j = \frac{\lambda_j^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad , \quad j = 1, 2, \dots \quad (4-56)$$

Af den første ligning (4-53) følger, at egensvingningsformerne kan skrives

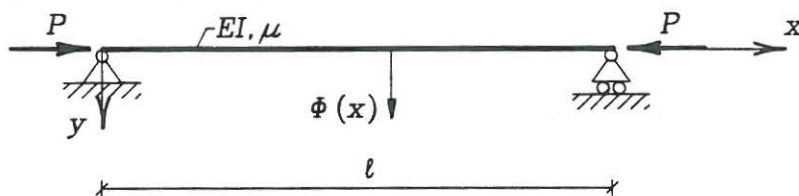
$$\Phi^{(i)}(x) = K \left((\cos \lambda_i + \cosh \lambda_i) \left(\sin \lambda_i \frac{x}{l} - \sinh \lambda_i \frac{x}{l} \right) - (\sin \lambda_i + \sinh \lambda_i) \left(\cos \lambda_i \frac{x}{l} - \cosh \lambda_i \frac{x}{l} \right) \right) \quad (4-57)$$

Graferne for de 3 laveste egensvingningsformer er skitseret i figur 4-13.



Figur 4-13: Egensvingningsformer for fast indspændt, fri bjælke med konstant tværsnit.

Eksempel 4-5: Bøjningsegensvingninger af simpelt understøttet bjælke med konstant tværsnit belastet med tryknormalkraft



Figur 4-14: Simpelt understøttet bjælke med konstant tværsnit belastet med tryknormalkraft.

En simpelt understøttet bjælke med konstant tværsnit af længden l belastes af en tryknormalkraft P . Da normalkraften regnes positiv som træk, haves $N^{(0)} = -P \Rightarrow N^{(0)} < 0$. Herved antager (4-32) formen

$$\left. \begin{aligned} \lambda^4 - \frac{Pl^2}{EI} \lambda^2 - \frac{\mu \omega^2 l^4}{EI} &= 0 \\ \nu^4 + \frac{Pl^2}{EI} \nu^2 - \frac{\mu \omega^2 l^4}{EI} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-58)$$

Randbetingelserne ved de simple understøtninger er uændret givet ved (4-37), (4-38). Ved indsætning af (4-31) i randbetingelserne (4-37) findes

$$\left. \begin{aligned} B + D &= 0 \\ -\frac{\lambda^2}{l^2}B + \frac{\nu^2}{l^2}D &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-59)$$

Mulige løsninger opfylder enten $B + D = 0 \wedge (\lambda = \nu = 0)$ eller $B = D = 0$. $B + D = 0 \wedge (\lambda = \nu = 0)$ indebærer ved indsætning i (4-31), at $\Phi(x) \equiv 0$. Følgelig er $\lambda = \nu = 0$ ikke egenværdier. For ikke-trivielle egensvingningsformer gælder derfor $B = D = 0 \wedge (\lambda \neq 0 \vee \nu \neq 0)$, hvorved (4-31) reduceres til

$$\Phi(x) = A \sin \lambda \frac{x}{l} + C \sinh \nu \frac{x}{l} \quad (4-60)$$

Dernæst indsættes (4-60) i randbetingelserne (4-38)

$$\left. \begin{aligned} A \sin \lambda + C \sinh \nu &= 0 \\ -A \frac{\lambda^2}{l^2} \sin \lambda + C \frac{\nu^2}{l^2} \sinh \nu &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (4-61)$$

$$\begin{bmatrix} \sin \lambda & \sinh \nu \\ -\frac{\lambda^2}{l^2} \sin \lambda & \frac{\nu^2}{l^2} \sinh \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-62)$$

Frekvensbetingelsen opnås ved at sætte determinanten til koefficientmatricen lig 0. Herved

$$\frac{1}{l^2}(\nu^2 + \lambda^2) \sin \lambda \sinh \nu = 0 \quad (4-63)$$

(4-63) kan kun opfyldes for

$$\sin \lambda = 0 \Rightarrow \quad (4-64)$$

$$\lambda_j = j\pi, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4-65)$$

Indsættes (4-64) i (4-62) findes

$$\begin{aligned} C \sinh \nu &= 0 \Rightarrow \\ C &= 0 \end{aligned} \quad (4-66)$$

Ved (4-60), (4-65), (4-66) bliver egensvingningsformerne

$$\Phi^{(j)}(x) = A \sin \left(j\pi \frac{x}{l} \right), \quad j = 1, 2, \dots \quad (4-67)$$

Egensvingningsformerne er således identisk med tilfældet uden normalkraft, beskrevet i eksempel 4-3. De cykliske egenfrekvenser ω_j følger af (4-58) og (4-65)

$$\omega_j^2 = \frac{j^4 \pi^4}{l^4} \frac{EI}{\mu} \left(1 - \frac{Pl^2}{EI} \frac{1}{j^2 \pi^2} \right), \quad j = 1, 2, \dots \quad (4-68)$$

(4-68) kan skrives

$$\omega_j = \omega_{j,0} \sqrt{1 - \frac{1}{j^2} \frac{P}{P_E}}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4-69)$$

hvor

$$\omega_{j,0} = \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4-70)$$

$$P_E = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (4-71)$$

$\omega_{j,0}$ er den ved (4-45) anførte cykliske egensvingningsfrekvens af bjælken for $P = 0$. P_E er søjlens knæklast efter Eulers formel.

For $j = 1$ fås specielt

$$\omega_1 = \omega_{1,0} \sqrt{1 - \frac{P}{P_E}} \quad (4-72)$$

ω_1 har således en parabolisk variation med P , idet $\omega_1 \downarrow 0$ for $P \uparrow P_E$.

4.3 Egensvingningsformernes ortogonalitetssegenskaber

Sætning 4-1: Egensvingningsformerne $\Phi^{(i)}(x)$ og $\Phi^{(j)}(x)$ til (4-28), hørende til forskellige cykliske egenfrekvenser $\omega_i \neq \omega_j$, opfylder ortogonalitetsbetingelserne

$$\begin{aligned} \int_0^l \mu(x) \Phi^{(i)}(x) \Phi^{(j)}(x) dx + m_0 \Phi^{(i)}(0) \Phi^{(j)}(0) + J_0 \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(0) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(0) \\ + m_1 \Phi^{(i)}(l) \Phi^{(j)}(l) + J_1 \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(l) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(l) = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ M_i & , \quad i = j \end{cases} \end{aligned} \quad (4-73)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \Phi^{(i)}(x) \frac{d^2}{dx^2} \Phi^{(j)}(x) + N^{(0)} \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(x) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(x) \right) dx \\ + k_0 \Phi^{(i)}(0) \Phi^{(j)}(0) + r_0 \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(0) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(0) + k_1 \Phi^{(i)}(l) \Phi^{(j)}(l) + r_1 \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(l) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(l) \\ = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ \omega_i^2 M_i & , \quad i = j \end{cases} \end{aligned} \quad (4-74)$$

hvor modalmassen i den i . egensvingning er givet ved

$$\begin{aligned}
M_i = & \int_0^l \mu(x) (\Phi^{(i)}(x))^2 dx + m_0 (\Phi^{(i)}(0))^2 + J_0 \left(\frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(0) \right)^2 \\
& + m_1 (\Phi^{(i)}(l))^2 + J_1 \left(\frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(l) \right)^2, \quad i = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{4-75}$$

Bevis:

Differentialligningen i (4-28) opskrives for den j . egensvingning, hvorefter ligningen ganges med $\Phi^{(i)}(x)$ efterfulgt af en integration mht. x over intervallet $[0, l]$. Ved partiel integration og anvendelse af de mekaniske randbetingelser i (4-28) findes

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \Phi^{(i)}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \Phi^{(j)}(x) \right) - \frac{d}{dx} \left(N^{(0)} \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(x) \right) \right) dx \\
& = \omega_j^2 \int_0^l \mu(x) \Phi^{(i)}(x) \Phi^{(j)}(x) dx \Rightarrow \\
& \Phi^{(i)}(l) (k_1 - \omega_j^2 m_1) \Phi^{(j)}(l) - \Phi^{(i)}(0) (-(k_0 - \omega_j^2 m_0) \Phi^{(j)}(0)) \\
& - \int_0^l \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(x) \left(\frac{d}{dx} \left(EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \Phi^{(j)}(x) \right) - N^{(0)} \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(x) \right) dx \\
& = \omega_j^2 \int_0^l \mu(x) \Phi^{(i)}(x) \Phi^{(j)}(x) dx \Rightarrow \\
& \Phi^{(i)}(0) \Phi^{(j)}(0) (k_0 - \omega_j^2 m_0) + \Phi^{(i)}(l) \Phi^{(j)}(l) (k_1 - \omega_j^2 m_1) \\
& - \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(l) \left(-(r_1 - \omega_j^2 J_1) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(l) \right) + \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(0) (r_0 - \omega_j^2 J_0) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(0) \\
& + \int_0^l EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \Phi^{(i)}(x) \frac{d^2}{dx^2} \Phi^{(j)}(x) dx + \int_0^l N^{(0)} \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(x) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(x) dx \\
& = \omega_j^2 \int_0^l \mu(x) \Phi^{(i)}(x) \Phi^{(j)}(x) dx \Rightarrow \\
& \int_0^l \left(EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \Phi^{(i)}(x) \frac{d^2}{dx^2} \Phi^{(j)}(x) + N^{(0)} \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(x) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(x) \right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +k_0\Phi^{(i)}(0)\Phi^{(j)}(0) + r_0\frac{d}{dx}\Phi^{(i)}(0)\frac{d}{dx}\Phi^{(j)}(0) + k_1\Phi^{(i)}(l)\Phi^{(j)}(l) + r_1\frac{d}{dx}\Phi^{(i)}(l)\frac{d}{dx}\Phi^{(j)}(l) \\
& = \omega_j^2 \left(\int_0^l \mu(x)\Phi^{(i)}(x)\Phi^{(j)}(x)dx + m_0\Phi^{(i)}(0)\Phi^{(j)}(0) + J_0\frac{d}{dx}\Phi^{(i)}(0)\frac{d}{dx}\Phi^{(j)}(0) \right. \\
& \quad \left. + m_1\Phi^{(i)}(l)\Phi^{(j)}(l) + J_1\frac{d}{dx}\Phi^{(i)}(l)\frac{d}{dx}\Phi^{(j)}(l) \right) \quad (4-76)
\end{aligned}$$

På venstresiden af (4-76) kan index i og j ombyttes uden at ændre udtrykkets værdi. Dette må da også være tilfældet for højresiden, hvorved

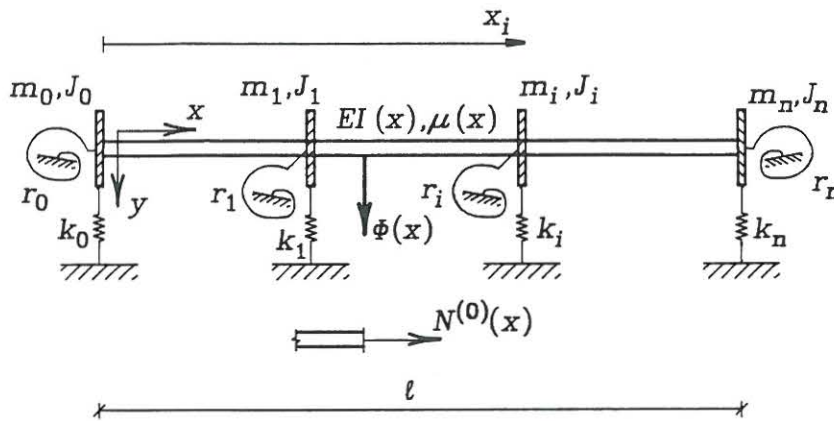
$$\begin{aligned}
& \omega_j^2 \left(\int_0^l \mu(x)\Phi^{(i)}(x)\Phi^{(j)}(x)dx + m_0\Phi^{(i)}(0)\Phi^{(j)}(0) + J_0\frac{d}{dx}\Phi^{(i)}(0)\frac{d}{dx}\Phi^{(j)}(0) \right. \\
& \quad \left. + m_1\Phi^{(i)}(l)\Phi^{(j)}(l) + J_1\frac{d}{dx}\Phi^{(i)}(l)\frac{d}{dx}\Phi^{(j)}(l) \right) \\
& = \omega_i^2 \left(\int_0^l \mu(x)\Phi^{(j)}(x)\Phi^{(i)}(x)dx + m_0\Phi^{(j)}(0)\Phi^{(i)}(0) + J_0\frac{d}{dx}\Phi^{(j)}(0)\frac{d}{dx}\Phi^{(i)}(0) \right. \\
& \quad \left. + m_1\Phi^{(j)}(l)\Phi^{(i)}(l) + J_1\frac{d}{dx}\Phi^{(j)}(l)\frac{d}{dx}\Phi^{(i)}(l) \right) \Rightarrow \\
& (\omega_i^2 - \omega_j^2) \left(\int_0^l \mu(x)\Phi^{(i)}(x)\Phi^{(j)}(x)dx + m_0\Phi^{(i)}(0)\Phi^{(j)}(0) + J_0\frac{d}{dx}\Phi^{(i)}(0)\frac{d}{dx}\Phi^{(j)}(0) \right. \\
& \quad \left. + m_1\Phi^{(i)}(l)\Phi^{(j)}(l) + J_1\frac{d}{dx}\Phi^{(i)}(l)\frac{d}{dx}\Phi^{(j)}(l) \right) = 0 \quad (4-77)
\end{aligned}$$

Da $\omega_i \neq \omega_j$ må den 2. faktor for $i \neq j$ være lig 0, hvilket udtrykker (4-73). Når (4-73) gælder, følger (4-74) direkte af (4-76). Dette slutter beviset for sætningen.

Venstresiden af (4-74) angiver for $i = j$ den dobbelte tøjningsenergi, når bjælken deformeres ud fra den statiske ligevægtstilstand svarende til egensvingningsformen $\Phi^{(j)}(x)$. Denne er positiv, når og kun når den statiske ligevægtstilstand er statisk stabil¹. Udtrykket (4-74) har derfor ikke mening ved tryknormalkræfter, der overskrider den statiske knæklast.

¹ M. P. Nielsen og L. Pilegaard Hansen, *op. cit.*

I tilfælde af multiple egenverdier vises på samme måde som for sætning 3-5, at det altid er muligt at udtage en følge af udæmpede egensvingningsformer $\Phi^{(1)}(x)$, $\Phi^{(2)}(x)$, \dots , der opfylder (4-73), (4-74).



Figur 4-15: Udæmpede egensvingninger af sammensat retliniet bjælke.

Figur 4-15 viser en sammensat retliniet bjælke bestående af n delbjælker. Endetværsnittene af delbjælkerne er beliggende ved abscisserne x_0, x_1, \dots, x_n . $x_0 = 0$ og $x_n = l$ angiver endetværsnittene af den sammensatte bjælke. Ved abscissen x_i , $i = 0, \dots, n$ er placeret en udbredt masse m_i med masseinertimomentet J_i om z -aksen. Desuden er placeret koncentrerede lineære translationsfjedere med fjederstivheden k_i i y -aksens retning, og en lineær rotationsfjeder med fjederstivhed r_i overfor rotationer i z -aksens retning. Bøjningsstivheden $EI(x)$, normalkraften i den statiske ligevægtstilstand $N^{(0)}(x)$ og massen pr. længdeenhed $\mu(x)$ sammenstykkedes af tilstrækkeligt glatte delbidrag fra de enkelte delbjælker. Ligeledes sammenstykkedes egensvingningsformerne $\Phi^{(j)}(x)$ af løsninger fra de enkelte delbjælker, der ved randsnittene $x = 0$ og $x = l$ opfylder randbetingelserne i (4-28), og ved grænsesnittene $x = x_i$, $i = 1, \dots, n-1$ opfylder relevante gennemgangsbetingelser, der udtrykker kontinuitet af flytning og vinkeldrejning, samt opfyldelse af moment- og forskydningskraftligevægt i disse snit.

Ortogonalitetsegenskaberne for det i figur 4-15 viste system kan nu vises at være

$$\int_0^l \mu(x) \Phi^{(i)}(x) \Phi^{(j)}(x) dx + \sum_{k=0}^n m_k \Phi^{(i)}(x_k) \Phi^{(j)}(x_k) + \sum_{k=0}^n J_k \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(x_k) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(x_k) = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ M_i & , \quad i = j \end{cases} \quad (4-78)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left(EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \Phi^{(i)}(x) \frac{d^2}{dx^2} \Phi^{(j)}(x) + N^{(0)}(x) \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(x) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(x) \right) dx \\
& + \sum_{k=0}^n k_k \Phi^{(i)}(x_k) \Phi^{(j)}(x_k) + \sum_{k=0}^n r_k \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(x_k) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(x_k) \\
& = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ \omega_i^2 M_i & , \quad i = j \end{cases} \quad (4-79)
\end{aligned}$$

$$M_i = \int_0^l \mu(x) (\Phi^{(i)}(x))^2 dx + \sum_{k=0}^n m_k (\Phi^{(i)}(x_k))^2 + \sum_{k=0}^n J_k \left(\frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(x_k) \right)^2 \quad (4-80)$$

Beviset for (4-78), (4-79) gennemføres ikke, men forløber iøvrigt som beviset for sætning 4-1, idet gennemgangsbetingelserne benyttes, efter der er foretaget partiel integration for delbjælkerne. Endelig bemærkes, at (4-73), (4-74) fremkommer af (4-78), (4-79) for $n = 1$.

4.4 Udvikling i udæmpede eigensvingsformer

I det følgende afsnit antages, at de geometriske randbetingelser (4-12) er homogene ($y_0(t) = y_1(t) = \theta_0(t) = \theta_1(t) \equiv 0$). Endvidere antages, at der ikke forekommer koncentrerede randbelastninger i form af egentlige ydre randbelastninger ($Q_0(t) = Q_1(t) = M_0(t) = M_1(t) \equiv 0$). Koncentrerede randpåvirkninger optræder herved kun fra evt. koncentrerede masser, fjedre eller dæmpere.

Af (4-10), (4-12), (4-14), (4-15), (4-23), (4-24), (4-25) følger, at flytningsfeltet $u_y(x, t)$ bestemmes som løsning til følgende rand- og begyndelsesværdiproblem

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(N^{(0)} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + c(x) \frac{\partial u_y}{\partial t} + \mu(x) \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = f_y^{(d)}(x, t), \quad t > 0 \right\}$$

Geometriske randbetingelser:

$$u_y(0, t) = 0, \quad u_y(l, t) = 0, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_y(0, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} u_y(l, t) = 0, \quad t > 0$$

Mekaniske randbetingelser:

$$EI(0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_y(0, t) = r_0 \frac{\partial}{\partial x} u_y(0, t) + J_0 \frac{\partial}{\partial x} \ddot{u}_y(0, t), \quad t > 0$$

$$EI(l) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_y(l, t) = -r_1 \frac{\partial}{\partial x} u_y(l, t) - J_1 \frac{\partial}{\partial x} \ddot{u}_y(l, t), \quad t > 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI(0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_y(0, t) \right) - N^0 \frac{\partial}{\partial x} u_y(0, t) = \\ -k_0 u_y(0, t) - c_0 \dot{u}_y(0, t) - m_0 \ddot{u}_y(0, t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI(l) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_y(l, t) \right) - N^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} u_y(l, t) = \\ k_1 u_y(l, t) + c_1 \dot{u}_y(l, t) + m_1 \ddot{u}_y(l, t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

Begyndelsesbetingelser:

$$u_y(x, 0) = u_{y,0}(x), \quad \dot{u}_y(x, 0) = \dot{u}_{y,0}(x), \quad x \in]0, l[$$

(4-81)

Løsningen til (4-81) søges på formen

$$u_y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi^{(j)}(x) q_j(t) \quad (4-82)$$

$\Phi^{(j)}(x)$ er de udæmpede egensvingningsformer, der bestemmes som løsning til egenværdiproblemerne (4-28). Koefficienterne i udviklingen $q_j(t)$, $j = 1, 2, \dots$ betegnes *de udæmpede modalkoordinater*. Disse bestemmes som løsning til følgende differentialligninger

$$\ddot{q}_i + 2\omega_i \left(\zeta_i \dot{q}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \sqrt{\frac{M_j \omega_j}{M_i \omega_i}} \zeta_{ij} \dot{q}_j \right) + \omega_i^2 q_i = \frac{1}{M_i} F_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, \quad t > 0 \quad (4-83)$$

hvor

$$F_i(t) = \int_0^l \Phi^{(i)}(x) f_y^{(d)}(x, t) dx \quad (4-84)$$

$$\zeta_i = \frac{\int_0^l c(x) (\Phi^{(i)}(x))^2 dx + c_0 (\Phi^{(i)}(0))^2 + c_1 (\Phi^{(i)}(l))^2}{2M_i \omega_i} \quad (4-85)$$

$$\zeta_{ij} = \frac{\int_0^l c(x) \Phi^{(i)}(x) \Phi^{(j)}(x) dx + c_0 \Phi^{(i)}(0) \Phi^{(j)}(0) + c_1 \Phi^{(i)}(l) \Phi^{(j)}(l)}{2\sqrt{\omega_i \omega_j} M_i M_j} \quad (4-86)$$

M_i er modalmassen givet ved (4-75). I de følgende udregninger eftervises (4-83).

Differentialligningen i (4-81) ganges med $\Phi^{(i)}(x)$, efterfulgt af en integration over intervallet $[0, l]$. Ved anvendelse af partiel integration og de mekaniske randbetingelser i (4-81) findes

$$\begin{aligned} & \int_0^l \Phi^{(i)}(x) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(N^{(0)} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) dx \\ & + \int_0^l \Phi^{(i)}(x) c(x) \dot{u}_y(x, t) dx + \int_0^l \Phi^{(i)}(x) \mu(x) \ddot{u}_y(x, t) dx \\ & = \int_0^l \Phi^{(i)}(x) f_y^{(d)}(x, t) dx \Rightarrow \\ & \Phi^{(i)}(0) (k_0 u_y(0, t) + c_0 \dot{u}_y(0, t) + m_0 \ddot{u}_y(0, t)) + \Phi^{(i)}(l) (k_1 u_y(l, t) + c_1 \dot{u}_y(l, t) + m_1 \ddot{u}_y(l, t)) \\ & + \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(0) \left(r_0 \frac{\partial}{\partial x} u_y(0, t) + J_0 \frac{\partial}{\partial x} \ddot{u}_y(0, t) \right) + \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(l) \left(r_1 \frac{\partial}{\partial x} u_y(l, t) + J_1 \frac{\partial}{\partial x} \ddot{u}_y(l, t) \right) \\ & + \int_0^l \left(EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \Phi^{(i)}(x) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + N^{(0)} \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(x) \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dx \\ & + \int_0^l \Phi^{(i)}(x) c(x) \dot{u}_y(x, t) dx + \int_0^l \Phi^{(i)}(x) \mu(x) \ddot{u}_y(x, t) dx \\ & = \int_0^l \Phi^{(i)}(x) f_y^{(d)}(x, t) dx \quad (4-87) \end{aligned}$$

Dernæst indsættes (4-82) på venstresiden af (4-87). Herved

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ddot{q}_j(t) \left(\int_0^l \mu(x) \Phi^{(i)}(x) \Phi^{(j)}(x) dx + m_0 \Phi^{(i)}(0) \Phi^{(j)}(0) + J_0 \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(0) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(0) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + m_1 \Phi^{(i)}(l) \Phi^{(j)}(l) + J_1 \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(l) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(l) \Big) \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \dot{q}_j(t) \left(\int_0^l c(x) \Phi^{(i)}(x) \Phi^{(j)}(x) dx + c_0 \Phi^{(i)}(0) \Phi^{(j)}(0) + c_1 \Phi^{(i)}(l) \Phi^{(j)}(l) \right) \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) \left(\int_0^l \left(EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \Phi^{(i)}(x) \frac{d^2}{dx^2} \Phi^{(j)}(x) dx + N^{(0)} \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(x) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(x) \right) dx \right. \\
& \left. + k_0 \Phi^{(i)}(0) \Phi^{(j)}(0) + r_0 \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(0) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(0) + k_1 \Phi^{(i)}(l) \Phi^{(j)}(l) + r_1 \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(l) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(l) \right) \\
& = \int_0^l \Phi^{(i)}(x) f_y^{(d)}(x, t) dx, \quad t > 0 \tag{4-88}
\end{aligned}$$

Når ortogonalitetsbetingelserne (4-73), (4-74) benyttes for det 1. og 3. led på venstresiden af (4-88), fremkommer (4-83) umiddelbart.

(4-83) er identisk med (3-160) bortset fra, at antallet af modalkoordinater og modalkoordinatligninger i dette tilfælde er uendelig. Dette er netop en følge af, at et kontinuert system har uendeligt mange frihedsgrader.

F_i givet ved (4-87) betegnes *modalbelastningen i den i. egensvingning*. ζ_i givet ved (4-85) betegnes *dæmpningsforholdet i den i. egensvingning*.

For at løse (4-83) må opstilles begyndelsesbetingelser ($q_i(0)$, $\dot{q}_i(0)$) for alle modalkoordinater. Disse kan udtrykkes ved begyndelsesbetingelserne i (4-81) på følgende måde

$$\left. \begin{aligned}
q_i(0) &= \frac{1}{M_i} \left(\int_0^l \mu(x) \Phi^{(i)}(x) u_{y,0}(x) dx + m_0 \Phi^{(i)}(0) u_{y,0}(0) \right. \\
&\quad \left. + J_0 \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(0) \frac{d}{dx} u_{y,0}(0) + m_1 \Phi^{(i)}(l) u_{y,0}(l) + J_1 \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(l) \frac{d}{dx} u_{y,0}(l) \right) \\
\dot{q}_i(0) &= \frac{1}{M_i} \left(\int_0^l \mu(x) \Phi^{(i)}(x) \dot{u}_{y,0}(x) dx + m_0 \Phi^{(i)}(0) \dot{u}_{y,0}(0) \right. \\
&\quad \left. + J_0 \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(0) \frac{d}{dx} \dot{u}_{y,0}(0) + m_1 \Phi^{(i)}(l) \dot{u}_{y,0}(l) + J_1 \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(l) \frac{d}{dx} \dot{u}_{y,0}(l) \right)
\end{aligned} \right\} \tag{4-89}$$

Af (4-82) følger

$$u_{y,0}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi^{(j)}(x) q_j(0), \quad \dot{u}_{y,0}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi^{(j)}(x) \dot{q}_j(0) \tag{4-90}$$

Ved indsætning af (4-90) på højresiderne af (4-89) og anvendelse af ortogonalitetsbetingelsen (4-73), følger gyldigheden af (4-89) umiddelbart.

Differentialligningerne (4-83) dekobler, hvis $\zeta_{ij} = 0$. Er dette tilfældet, bliver (4-83) identisk med (3-165). Løsningerne er dermed givet ved (3-166), (3-167), (3-168).

Er dekoblingsbetingelserne ikke opfyldt, er analytisk behandling stadig mulig ved den i afsnit 3.6 beskrevne perturbationsmetode.

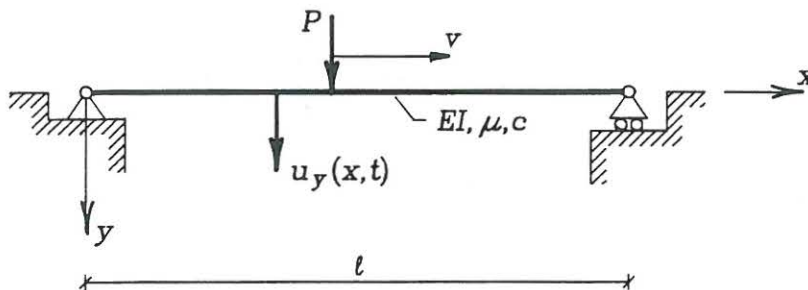
Når modalkoordinaterne er bestemt, bestemmes flytningsfeltet ved indsætning i (4-82). Andre gensvar som bøjningsmomentet $M(x, t)$ og forskydningskraften følger dernæst ved ledvis partiel differentiation

$$\left. \begin{aligned} M(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} M^{(j)}(x) q_j(t) \\ M^{(j)}(x) &= -EI \frac{d^2}{dx^2} \Phi^{(j)}(x) \end{aligned} \right\} \quad (4-91)$$

$$\left. \begin{aligned} Q(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} Q^{(j)}(x) q_j(t) \\ Q^{(j)}(x) &= -\frac{d}{dx} \left(EI(x) \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(x) \right) + N^{(0)} \frac{d}{dx} \Phi^{(j)}(x) \end{aligned} \right\} \quad (4-92)$$

$M^{(j)}(x)$ og $Q^{(j)}(x)$ angiver henholdsvis bøjningsmomentet og forskydningskraften ved abscissen x , når bjælken deformeres svarende til $u_y(x) = \Phi^{(j)}(x)$. Det bemærkes, at (4-91) og (4-92) angiver tillægsmomentet og tillægfskydningskraften ved svingninger ud fra den statiske ligevægtstilstand. Ved dimensionering eller bæreevneeftersvisning skal hertil adderes moment og forskydningskraft fra den statiske belastning.

Eksempel 4-6: Simpelt understøttet homogen bjælke med overkørende kraft



Figur 4-16: Simpelt understøttet homogen bjælke med overkørende kraft.

Figur 4-16 viser en simpelt understøttet Bernoulli-Eulerbjælke af længden l . Tværsnittet antages konstant med bøjningsstivheden EI og massen pr. længdeenhed μ . Dæmpningsbelastningen antages lineært viskos med den konstante dæmpningskonstant c .

Bjælken antages i hvile til tiden $t = 0$, hvor en kraft P kører ud på bjælken med den konstante hastighed v . Bevægelsen af bjælken ønskes bestemt.

Bjælkens udæmpede cykliske egenfrekvenser ω_j er givet ved (4-45). Egensvingningsformerne er givet ved (4-48). Disse antages på formen

$$\Phi^{(j)}(x) = \sin(j\pi \frac{x}{l}), \quad j = 1, 2, \dots \quad (4-93)$$

Ortogonalitetsbetingelsen (4-73) bliver

$$\int_0^l \mu \Phi^{(i)}(x) \Phi^{(j)}(x) dx = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ M_i & , \quad i = j \end{cases} \quad (4-94)$$

$$M_j = \frac{1}{2} \mu l, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4-95)$$

Dekoblingsbetingelsen er i dette tilfælde opfyldt, idet

$$\int_0^l c \Phi^{(i)}(x) \Phi^{(j)}(x) dx = \frac{c}{\mu} \int_0^l \mu \Phi^{(i)}(x) \Phi^{(j)}(x) dx = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ 2\zeta_i \omega_i M_i & , \quad i = j \end{cases} \quad (4-96)$$

Af (4-94), (4-96) følger

$$2\zeta_j \omega_j = \frac{c}{\mu}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4-97)$$

Belastningen pr. længdeenhed kan skrives

$$f_y^{(d)}(x, t) = \begin{cases} P\delta(x - vt) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{l}{v} \\ 0 & , \quad \frac{l}{v} < t < \infty \end{cases} \quad (4-98)$$

$[0, \frac{l}{v}]$ angiver tidsintervallet, hvor kraften er på bjælken. Ved (4-84) og (4-98) følger, at modalbelastningerne bliver

$$F_j(t) = \begin{cases} P\Phi^{(j)}(vt) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{l}{v} \\ 0 & , \quad \frac{l}{v} < t < \infty \end{cases} \quad (4-99)$$

Da bjælken er i hvile til tiden $t = 0$, er

$$u_{y,0}(x) = \dot{u}_{y,0}(x) \equiv 0 \quad (4-100)$$

Ved (4-89) følger heraf

$$q_j(0) = \dot{q}_j(0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4-101)$$

Ved (3-166) bliver modalkoordinaterne

$$q_j(t) = \int_0^{\min(t, \frac{l}{v})} h_j(t - \tau) P \Phi^{(j)}(v\tau) d\tau = P \int_0^{\min(t, \frac{l}{v})} h_j(t - \tau) \sin(j\pi \frac{v\tau}{l}) d\tau, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4-102)$$

Impulsresponsfunktionen $h_i(t)$ er givet ved (3-168), (4-95), (4-97)

$$h_j(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{2}{\mu l \omega_{d,j}} e^{-\frac{\zeta}{2\mu} t} \sin \omega_{d,j} t & , \quad t > 0 \end{cases} \quad (4-103)$$

(4-102) kan udregnes analytisk. Bjælkens bevægelse følger endelig ved indsætning af (4-102) i (4-82)

$$u_y(x, t) = \frac{2P}{\mu l} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(j\pi \frac{x}{l})}{\omega_{d,j}} \int_0^{\min(t, \frac{l}{v})} e^{-\frac{\zeta}{2\mu}(t-\tau)} \sin(\omega_{d,j}(t-\tau)) \sin\left(j\pi \frac{v\tau}{l}\right) d\tau \quad (4-104)$$

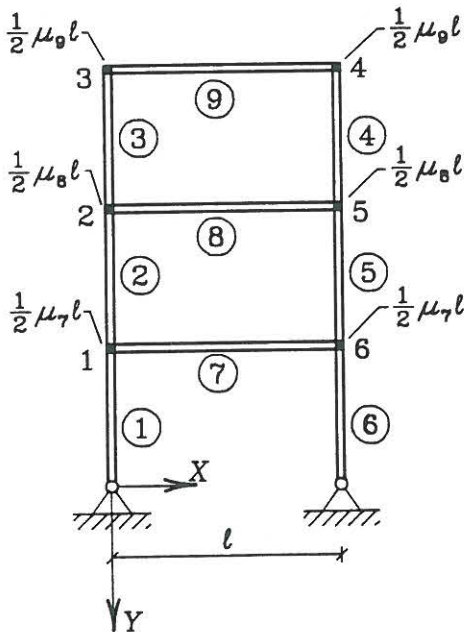
Bøjningsmomentet i bjælkens midte bliver ved (4-45), (4-91)

$$M\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{1}{4} Pl \cdot D(t) \quad (4-105)$$

$$\begin{aligned} D(t) &= 8 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\pi^2 j^2}{\omega_{d,j}} \frac{EI}{\mu l^4} \sin\left(j\frac{\pi}{2}\right) \int_0^{\min(t, \frac{l}{v})} e^{-\frac{\zeta}{2\mu}(t-\tau)} \sin(\omega_{d,j}(t-\tau)) \sin\left(j\pi \frac{v\tau}{l}\right) d\tau \\ &= 8 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin\left(j\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{1-\zeta_j^2}} \int_0^{\min(t, \frac{l}{v})} e^{-\frac{\zeta}{2\mu}(t-\tau)} \sin(\omega_{d,j}(t-\tau)) \sin\left(j\pi \frac{v\tau}{l}\right) d\tau \end{aligned} \quad (4-106)$$

$M = \frac{1}{4} Pl$ angiver det maximale statiske moment. $D(t)$ er en *dynamisk forstærkningsfaktor*.

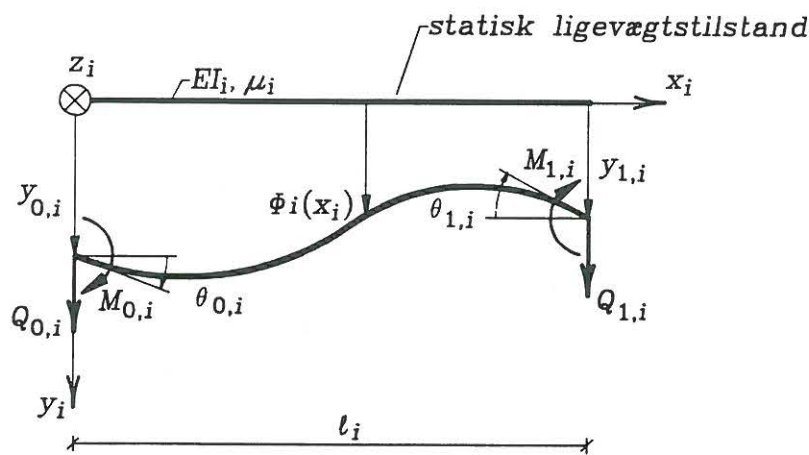
4.5 Udæmpede egensvingninger af plane rammekonstruktioner



Figur 4-17: Plan rammekonstruktion.

I det følgende omtales bestemmelsen af udæmpede cykliske egenfrekvenser af simple plane rammekonstruktioner.

I overensstemmelse med forudsætningerne i afsnit 4.1 antages alle bjælker uendeligt stive overfor axialdeformationer. Dette sætter et geometrisk bånd på mulige deformationer af rammens knudepunkter. Den lodrette flytning af knuderne 1, ..., 6 i figur 4-17 bliver således lig 0, medens den vandrette flytning af henholdsvis knuderne 1 og 6, 2 og 5 og 3 og 4 parvis bliver lige store. Den vandrette inertibelastning på bjælkerne 7, 8 og 9 fordeler sig herved med halvdelen på hver af de tilstødende bjælkeknuder. Formelt svarer dette til at regne med koncentrerede masser lig den halve bjælkemasse i de tilstødende bjælkeknuder ved vandrette bevægelser af disse.



Figur 4-18: Egensvingninger af bjælkeelement i .

Alle bjælkeelementer antages at have konstant tværsnit mellem endetværsnittene. Figur 4-18 viser bjælkeelement i med længden l_i , bøjningsstivheden EI_i og massen pr. længdeenhed μ_i . Normalkraften $N_i^{(0)}$ i den statiske ligevægtstilstand antages at have ignorabel indflydelse på fordelingen af bøjningsmomentet, hvorfor der ses bort fra denne i formuleringen. Bjælkeelementet antages fri for koncentrerede fjedre eller masser. Forefindes koncentrerede fjedre eller masser på et retlinet bjælkeelement, indføres fiktive systemknuder ved disse.

Der indlægges et lokalt (x_i, y_i, z_i) -koordinatsystem for bjælke i , defineret som vist i figur 4-18. Origo vælges ved bjælkens ene endetværsnit, x_i -aksen er sammenfaldende med linien gennem bøjningscentrene, og (x_i, y_i) -planen er sammenfaldende med konstruktionsplanen. $y_{0,i}, \theta_{0,i}, Q_{0,i}, M_{0,i}$ angiver amplituden af henholdsvis flytningen i y_i -aksens retning, rotationen i z_i -aksens retning, kraften på bjælkeknuden i y_i -aksens retning og momentet på bjælkeknuden i z_i -aksens retning på bjælkens venstre endetværsnit $x_i = 0$ fra de tilstødende knuder under udæmpede egensvingninger af rammen. $y_{1,i}, \theta_{1,i}, Q_{1,i}, M_{1,i}$ angiver amplituden af de tilsvarende størrelser ved højre endetværsnit $x_i = l_i$. $\Phi_i(x_i)$ angiver amplituden af flytningen på tværs af bjælkeaksen. Da systemet er udæmpet, er alle disse størrelser i fase ved egensvingninger af rammen, og alle amplituder er reelle.

$\Phi_i(x_i)$ er løsning til (4-29) for $N^{(0)} = 0$, hvorfor løsningen er givet ved (4-33), (4-34)

$$\Phi_i(x_i) = A_i \sin\left(\lambda_i \frac{x_i}{l_i}\right) + B_i \cos\left(\lambda_i \frac{x_i}{l_i}\right) + C_i \sinh\left(\lambda_i \frac{x_i}{l_i}\right) + D_i \cosh\left(\lambda_i \frac{x_i}{l_i}\right) \quad (4-107)$$

$$\lambda_i^4 = \frac{\mu_i \omega^2 l_i^4}{EI_i} = \kappa_i^4 \lambda^4 \quad (4-108)$$

$$\kappa_i^4 = \frac{\mu_i}{\mu_0} \frac{EI_0}{EI_i} \left(\frac{l_i}{l_0}\right)^4 \quad (4-109)$$

$$\lambda^4 = \frac{\mu_0 \omega^2 l_0^4}{EI_0} \quad (4-110)$$

EI_0, μ_0 og l_0 angiver vilkårligt valgte referenceværdier af bøjningsstivheden, massen pr. længdeenhed og bjælkelængden.

λ_i givet ved (4-108) må ikke forveksles med egenværdier af den globale frekvensparameteren λ givet ved (4-110). κ_i givet ved (4-109) angiver den forholdsmæssige størrelse af frekvensparameteren for bjælke i .

Det harmonisk varierende flytningsfelt $u_{y,i}(x_i, t) = \Phi_i(x_i) \cos \omega t$ for bjælke i kan opfattes som den stationære bevægelse fra harmonisk varierende randflytninger $[y_{0,i}, \theta_{0,i}, y_{1,i}, \theta_{1,i}] \cdot \cos \omega t$ eller harmonisk varierende randkræfter $[Q_{0,i}, M_{0,i}, Q_{1,i}, M_{1,i}] \cos \omega t$. Formålet med de følgende regninger er at bestemme $[A_i, B_i, C_i, D_i]$ i (4-107) således, at randflytningerne $[y_{0,i}, \theta_{0,i}, y_{1,i}, \theta_{1,i}] \cos \omega t$ er kompatible til ethvert tidspunkt med flytningsfeltet ved abscisserne $x_i = 0^+$ og $x_i = l_i^-$, og randbelastningerne $[Q_{0,i}, M_{0,i}, Q_{1,i}, M_{1,i}] \cos \omega t$ er i ligevægt til ethvert tidspunkt med snitkræfterne ved $x_i = 0^+$ og $x_i = l_i^-$.

Der indføres amplitudevektoren

$$\mathbf{X}_i^T = [y_{0,i}, l_i \theta_{0,i}, y_{1,i}, l_i \theta_{1,i}] \quad (4-111)$$

Der gælder de geometriske betingelser, jvf. (4-12)

$$\left. \begin{aligned} y_{0,i} &= \Phi_i(0) \\ \theta_{0,i} &= \frac{d}{dx_i} \Phi_i(0) \\ y_{1,i} &= \Phi_i(l_i) \\ \theta_{1,i} &= \frac{d}{dx_i} \Phi_i(l_i) \end{aligned} \right\} \quad (4-112)$$

De mekaniske randbetingelser er givet ved (4-14) og (4-15) med $N^{(0)} = 0$. Ved indsætning af harmonisk varierede flytningsfelt og randkræfter, findes følgende randbetingelser for amplitudestørrelserne

$$\left. \begin{aligned} M_{0,i} &= -EI_i \frac{d^2 \Phi_i(0)}{dx_i^2} \\ Q_{0,i} &= EI_i \frac{d^3 \Phi_i(0)}{dx_i^3} \\ M_{1,i} &= EI_i \frac{d^2 \Phi_i(l_i)}{dx_i^2} \\ Q_{1,i} &= -EI_i \frac{d^3 \Phi_i(l_i)}{dx_i^3} \end{aligned} \right\} \quad (4-113)$$

Ved indsætning af (4-107) i (4-112), kan $[y_{0,i}, \theta_{0,i}, y_{1,i}, \theta_{1,i}]$ udtrykkes ved integrationskonstanterne A_i, B_i, C_i, D_i .

$$\begin{bmatrix} y_{0,i} \\ l_i \theta_{0,i} \\ y_{1,i} \\ l_i \theta_{1,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda_i & 0 & \lambda_i & 0 \\ \sin \lambda_i & \cos \lambda_i & \sinh \lambda_i & \cosh \lambda_i \\ \lambda_i \cos \lambda_i & -\lambda_i \sin \lambda_i & \lambda_i \cosh \lambda_i & \lambda_i \sinh \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix} \quad (4-114)$$

Ved indsætning af (4-107) i (4-113) kan tilsvarende $M_{0,i}, Q_{0,i}, M_{1,i}, Q_{1,i}$ udtrykkes ved integrationskonstanterne A_i, B_i, C_i, D_i

$$\begin{bmatrix} l_i Q_{0,i} \\ M_{0,i} \\ l_i Q_{1,i} \\ M_{1,i} \end{bmatrix} = \frac{EI_i}{l_i^2} \lambda_i^2 \begin{bmatrix} -\lambda_i & 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \lambda_i \cos \lambda_i & -\lambda_i \sin \lambda_i & -\lambda_i \cosh \lambda_i & -\lambda_i \sinh \lambda_i \\ -\sin \lambda_i & -\cos \lambda_i & \sinh \lambda_i & \cosh \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix} \quad (4-115)$$

(4-114) løses mht. $[A_i, B_i, C_i, D_i]$, der indsættes i (4-115). Herved findes

$$\begin{bmatrix} l_i Q_{0,i} \\ M_{0,i} \\ l_i Q_{1,i} \\ M_{1,i} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_i(\lambda_i) \begin{bmatrix} y_{0,i} \\ l_i \theta_{0,i} \\ y_{1,i} \\ l_i \theta_{1,i} \end{bmatrix} \quad (4-116)$$

hvor

$$\mathbf{k}_i(\lambda_i) = \frac{EI_i}{l_i^2} \begin{bmatrix} F_6(\lambda_i) & F_4(\lambda_i) & -F_5(\lambda_i) & F_3(\lambda_i) \\ F_4(\lambda_i) & F_2(\lambda_i) & -F_3(\lambda_i) & F_1(\lambda_i) \\ -F_5(\lambda_i) & -F_3(\lambda_i) & F_6(\lambda_i) & -F_4(\lambda_i) \\ F_3(\lambda_i) & F_1(\lambda_i) & -F_4(\lambda_i) & F_2(\lambda_i) \end{bmatrix} \quad (4-117)$$

$$F_1(\lambda_i) = \frac{\lambda_i(\sinh \lambda_i - \sin \lambda_i)}{1 - \cos \lambda_i \cosh \lambda_i} = 2 + \frac{3}{420} \lambda_i^4 + \frac{1097}{69854400} \lambda_i^8 + o(\lambda_i^{11}) \quad (4-118a)$$

$$F_2(\lambda_i) = \frac{\lambda_i(\sin \lambda_i \cosh \lambda_i - \cos \lambda_i \sinh \lambda_i)}{1 - \cos \lambda_i \cosh \lambda_i} = 4 - \frac{4}{420} \lambda_i^4 - \frac{1136}{69854400} \lambda_i^8 + o(\lambda_i^{11}) \quad (4-118b)$$

$$F_3(\lambda_i) = \frac{\lambda_i^2(\cosh \lambda_i - \cos \lambda_i)}{1 - \cos \lambda_i \cosh \lambda_i} = 6 + \frac{13}{420} \lambda_i^4 + \frac{5043}{69854400} \lambda_i^8 + o(\lambda_i^{11}) \quad (4-118c)$$

$$F_4(\lambda_i) = \frac{\lambda_i^2 \sin \lambda_i \sinh \lambda_i}{1 - \cos \lambda_i \cosh \lambda_i} = 6 - \frac{22}{420} \lambda_i^4 - \frac{5352}{69854400} \lambda_i^8 + o(\lambda_i^{11}) \quad (4-118d)$$

$$F_5(\lambda_i) = \frac{\lambda_i^3(\sinh \lambda_i + \sin \lambda_i)}{1 - \cos \lambda_i \cosh \lambda_i} = 12 + \frac{54}{420} \lambda_i^4 + \frac{23022}{69854400} \lambda_i^8 + o(\lambda_i^{11}) \quad (4-118e)$$

$$F_6(\lambda_i) = \frac{\lambda_i^3(\sin \lambda_i \cosh \lambda_i + \cos \lambda_i \sinh \lambda_i)}{1 - \cos \lambda_i \cosh \lambda_i} = 12 - \frac{156}{420} \lambda_i^4 - \frac{25488}{69854400} \lambda_i^8 + o(\lambda_i^{11}) \quad (4-118f)$$

$k_i(\lambda_i)$ angiver stivhedsmatricen for bjælke i under tvungne svingninger fra harmonisk varierende randpåvirkninger.

Funktioner $F_j(\lambda_i)$, $j = 1, \dots, 6$, betegnes *Kolouseks funktioner*.¹ Ved anvendelse af (4-108) og den i (4-118) anførte asymptotiske variation af Kolouseks funktioner, haves følgende rækkeudvikling for $k_i(\omega^2)$ i parameteren ω^2

$$k_i(\omega^2) = k_i^{(0)} - \omega^2 m_i^{(0)} - \omega^4 m_i^{(1)} + o(\omega^5) \quad (4-119)$$

hvor

$$\left. \begin{aligned} k_i^{(0)} &= \frac{EI_i}{l_i^2} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \\ m_i^{(0)} &= \frac{\mu_i l_i^2}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix} \\ m_i^{(1)} &= \frac{\mu_i^2 l_i^6}{69854400 EI_i} \begin{bmatrix} 25488 & 5352 & 23022 & -5043 \\ 5352 & 1136 & 5043 & -1097 \\ 23022 & 5043 & 25488 & -5352 \\ -5043 & -1097 & -5352 & 1136 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4-120)$$

¹V. Kolousek: Dynamik der Baukonstruktionen, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin (1962).

$\mathbf{o}(x)$ er en matrix med egenskaben $\lim_{x \rightarrow 0} \mathbf{o}(x)/x = \mathbf{0}$.

Betragt et tilnærmet flytningsfelt $u_{y,i}(x_i, t)$, der fremkommer ved interpolation af rand-flytningerne på følgende måde

$$u_{y,i}(x_i, t) = \mathbf{N}(x_i)^T \mathbf{x}_i(t) \quad (4-121)$$

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{X}_i \cos \omega t \quad (4-122)$$

$$\mathbf{N}^T(x_i) = [N_1(x_i), N_2(x_i), N_3(x_i), N_4(x_i)] \quad (4-123)$$

$$N_1(\xi) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \quad (4-123a)$$

$$N_2(\xi) = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi \quad (4-123b)$$

$$N_3(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2 \quad (4-123c)$$

$$N_4(\xi) = \xi^3 - \xi^2 \quad (4-123d)$$

$$\xi = \frac{x_i}{l_i} \quad (4-124)$$

\mathbf{X}_i er givet ved (4-111). *Formfunktionerne* (4-123) indebærer, at såvel flytningsfeltet $u_{y,i}(x, t)$ som vinkeldrejningen $\frac{\partial}{\partial x_i} u_{y,i}(x_i, t)$ bliver compatible med knudepunktsflytningerne $\mathbf{x}_i(t)$.

Den potentielle energi og den kinetiske energi af bjælken bliver under forudsætning af flytningsfeltet (4-121)

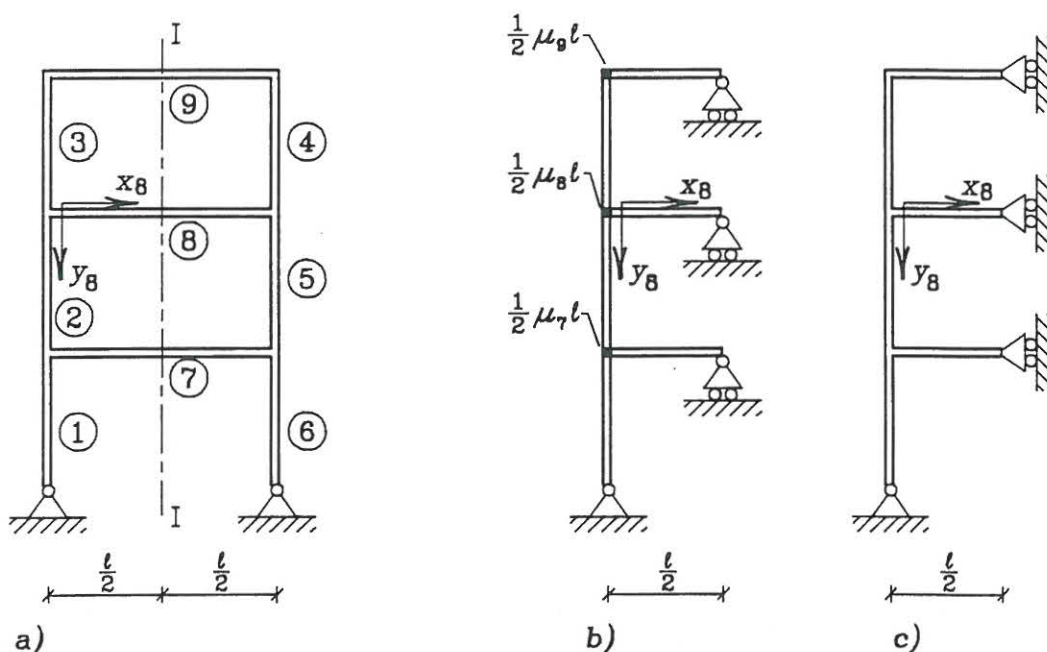
$$U_i = \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T(t) \mathbf{k}_i^{(0)} \mathbf{x}_i(t) \quad (4-125)$$

$$T_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^T(t) \mathbf{m}_i^{(0)} \dot{\mathbf{x}}_i(t) \quad (4-126)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k}_i^{(0)} &= \frac{EI_i}{l_i^2} \int_0^1 \frac{d^2}{d\xi^2} \mathbf{N}(\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} \mathbf{N}^T(\xi) d\xi \\ \mathbf{m}_i^{(0)} &= \mu_i l_i^2 \int_0^1 \mathbf{N}(\xi) \mathbf{N}^T(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (4-127)$$

Ved indsætning af (4-123) i (4-127) ses, at $\mathbf{k}_i^{(0)}$ og $\mathbf{m}_i^{(0)}$ givet ved (4-127) er identisk med de tilsvarende matricer givet ved (4-120).

$\mathbf{k}_i^{(0)}$ angiver stivhedsmatricen ved kvasistatiske deformationer. $\mathbf{m}_i^{(0)}$ er den såkaldte *konsistente massematrix*. Tillægsordet konsistent refererer til, at den potentielle energi og den kinetiske energi af elementet afledes af samme tilnærmede kompatible flytningsfelt (4-121). Den gennemførte analyse viser, at den statiske stivhedsmatrix $\mathbf{k}_i^{(0)}$ og den konsistente massematrix $\mathbf{m}_i^{(0)}$ bestemmes af de 2 første led i rækkeudviklingen (4-119) af bjælkeelementets stivhedsmatrix $\mathbf{k}_i(\omega^2)$ ved tvungne harmoniske svingninger.



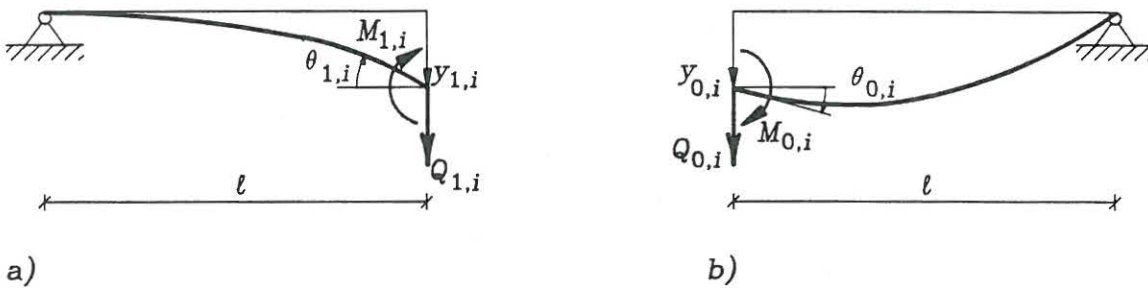
Figur 4-19: Ækvivalente systemer ved symmetriske rammekonstruktioner. a) Ramme symmetrisk om planen $I - I$. b) Ækvivalent system ved antisymmetriske egensvingsformer. c) Ækvivalent system ved symmetriske egensvingsformer.

Antag, at rammen i figur 4-19a er symmetrisk om en plan $I - I$. I så fald vil egensvingsformerne enten være antisymmetriske eller symmetriske om symmetriplanen. Ved antisymmetriske egensvingsformer er knudepunktfiguren bevægelig. Bjælkerne 7, 8, 9 får herved en bevægelse i den lokale x_i -retning (på tværs af $I - I$ -planen). I den lokale y_i -retning er nedbøjningen lig 0 i symmetriplanen, samtidig med at egensvingsformen

her har vendetangent og dermed momentnulpunkt. Følgelig kan antimetriske egensvingsformer analyseres ved det i figur 4-19b viste reducerede system. Inertikræfterne på de vandrette bjælker er ækvivaleret ved inertibelastningen på koncentrerede masser i de tilstødende knuder lig den halve bjælkemasse.

Symmetriske egensvingsformer har fast knudepunktsfigur. Følgelig får bjælkerne 7, 8, 9 ingen vandret bevægelse i den lokale x_i -retning. Nedbøjningen i den lokale y_i -retning har hældningen 0 i symmetriplanet, samtidig med at forskydningskraften her er lig 0. Følgelig kan symmetriske egensvingsformer analyseres ved det i figur 4-19c viste reducerede system.

I figur 4-19b og 4-19c er de vandrette bjælker erstattet af elementer med specielle geometriske eller mekaniske randbetingelser. For disse bjælkeelementer kan opstilles stivhedsrelationer ved omformning af relationerne (4-116). I det følgende gives eksempler på opstillingen af sådanne specielle stivhedsrelationer.



Figur 4-20: Bjælkeelementer med fast simpel understøtning.

Bjælkeelementet i figur 4-20a er fast simpelt understøttet i venstre randpunkt, hvorfor $y_{0,i} = M_{0,i} = 0$. Indføres disse betingelser i (4-116), (4-117) findes

$$\begin{bmatrix} l_i Q_{0,i} \\ 0 \\ l_i Q_{1,i} \\ M_{1,i} \end{bmatrix} = \frac{EI_i}{l_i^2} \begin{bmatrix} F_4(\lambda_i) & -F_5(\lambda_i) & F_3(\lambda_i) \\ F_2(\lambda_i) & -F_3(\lambda_i) & F_1(\lambda_i) \\ -F_3(\lambda_i) & F_6(\lambda_i) & -F_4(\lambda_i) \\ F_1(\lambda_i) & -F_4(\lambda_i) & F_2(\lambda_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_i \theta_{0,i} \\ y_{1,i} \\ l_i \theta_{1,i} \end{bmatrix} \quad (4-128)$$

Af den 2. ligning i (4-128) følger

$$l_i \theta_{0,i} = \frac{F_3(\lambda_i)}{F_2(\lambda_i)} y_{1,i} - \frac{F_1(\lambda_i)}{F_2(\lambda_i)} l_i \theta_{1,i} \quad (4-129)$$

Ved indsættelse af (4-129) i (4-128) findes den reducerede stivhedsmatrix

$$\begin{bmatrix} l_i Q_{1,i} \\ M_{1,i} \end{bmatrix} = \frac{EI_i}{l_i^2} \begin{bmatrix} F_7(\lambda_i) & -F_9(\lambda_i) \\ -F_9(\lambda_i) & F_8(\lambda_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,i} \\ l_i \theta_{1,i} \end{bmatrix} \quad (4-130)$$

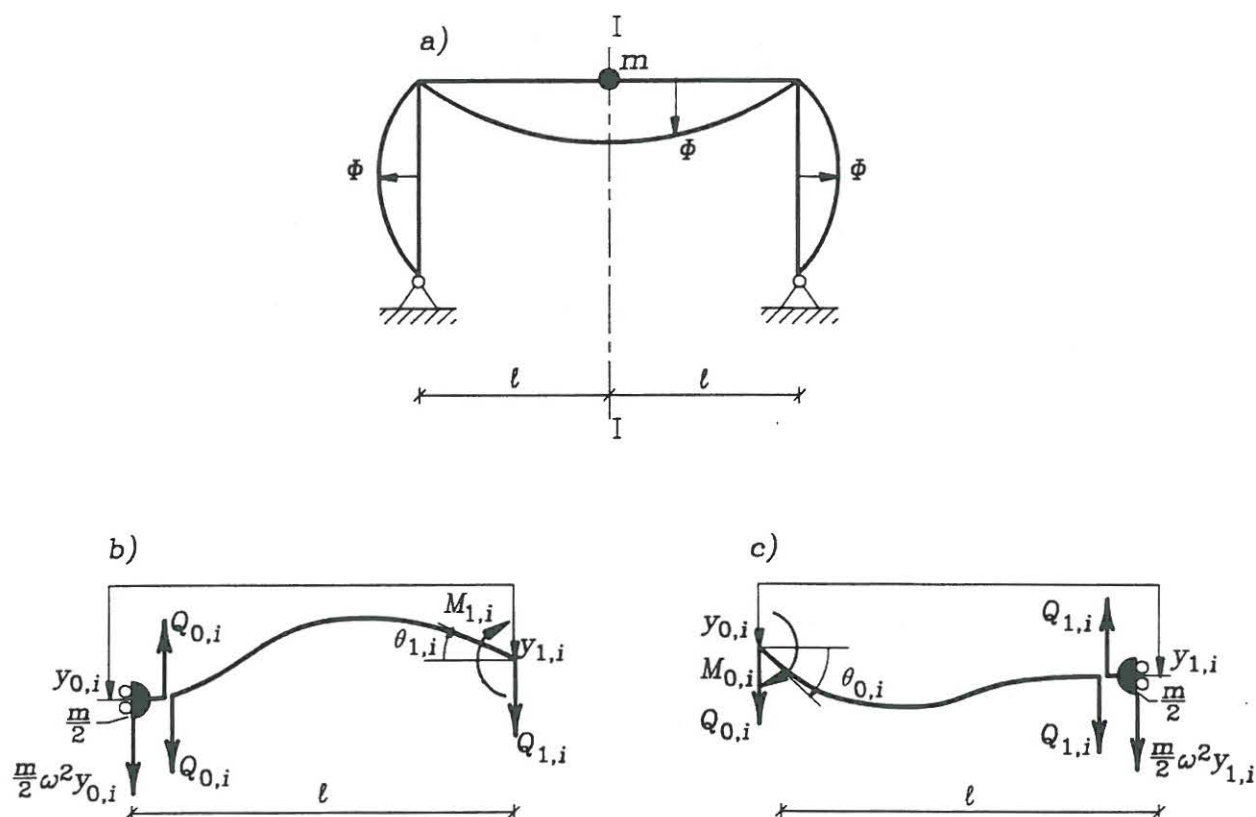
$$F_7(\lambda_i) = F_6(\lambda_i) - \frac{F_3^2(\lambda_i)}{F_2(\lambda_i)} = \frac{2\lambda_i^3 \cos \lambda_i \cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i \cosh \lambda_i - \cos \lambda_i \sinh \lambda_i} = 3 + o(\lambda_i^3) \quad (4-130a)$$

$$F_8(\lambda_i) = F_2(\lambda_i) - \frac{F_1^2(\lambda_i)}{F_2(\lambda_i)} = \frac{2\lambda_i \sin \lambda_i \sinh \lambda_i}{\sin \lambda_i \cosh \lambda_i - \cos \lambda_i \sinh \lambda_i} = 3 + o(\lambda_i^3) \quad (4-130b)$$

$$F_9(\lambda_i) = F_4(\lambda_i) - \frac{F_1(\lambda_i)F_3(\lambda_i)}{F_2(\lambda_i)} = \frac{\lambda_i^2(\sin \lambda_i \cosh \lambda_i + \cos \lambda_i \sinh \lambda_i)}{\sin \lambda_i \cosh \lambda_i - \cos \lambda_i \sinh \lambda_i} = 3 + o(\lambda_i^3) \quad (4-130c)$$

Tilsvarende findes den reducerede stivhedsmatrix for bjælkeelementet i figur 4-20b med fast simpel understøtning i højre endepunkt

$$\begin{bmatrix} l_i Q_{0,i} \\ M_{0,i} \end{bmatrix} = \frac{EI_i}{l_i^2} \begin{bmatrix} F_7(\lambda_i) & F_9(\lambda_i) \\ F_9(\lambda_i) & F_8(\lambda_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{0,i} \\ l_i \theta_{0,i} \end{bmatrix} \quad (4-131)$$



Figur 4-21: Bjælkeelement med koncentreret masse i endtværsnit. a) Symmetrisk ramme-konstruktion med symmetrisk egensvingningsform. b) Bevægelig indspænding ved venstre randtværsnit. c) Bevægelig indspænding ved højre randtværsnit.

For den symmetriske ramme i figur 4-21a tillades en punktformig masse m i symmetriplanen $I - I$. Denne fordeles med $\frac{m}{2}$ til henholdsvis højre- og venstre rammehalvdel. Figur 4-21b viser forholdene for den højre halvdel af den vandrette bjælke i figur 4-21a, mens figur 4-21c viser forholdene for venstre halvdel af samme. Bemærk at længden af delbjælkerne er l .

For bjælkeelementet i figur 4-21b påvirkes massen $\frac{m}{2}$ af en inertikraft med amplituden $+\frac{m}{2}\omega^2 y_{0,i}$ regnet positiv i retning af $y_{0,i}$. Af ligevægtsligningen for den fritskårne masse findes $Q_{0,i} = \frac{m}{2}\omega^2 y_{0,i}$. Pga. indspændingen er $\theta_{0,i} = 0$. Indføres disse betingelser i (4-116), (4-117) findes

$$\begin{bmatrix} l_i \frac{m}{2} \omega^2 y_{0,i} \\ M_{0,i} \\ l_i Q_{1,i} \\ M_{1,i} \end{bmatrix} = \frac{EI_i}{l_i^2} \begin{bmatrix} F_6(\lambda_i) & -F_5(\lambda_i) & F_3(\lambda_i) \\ F_4(\lambda_i) & -F_3(\lambda_i) & F_1(\lambda_i) \\ -F_5(\lambda_i) & F_6(\lambda_i) & -F_4(\lambda_i) \\ F_3(\lambda_i) & -F_4(\lambda_i) & F_2(\lambda_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{0,i} \\ y_{1,i} \\ l_i \theta_{1,i} \end{bmatrix} \quad (4-132)$$

Af den 1. ligning i (4-132) følger ved (4-108)

$$y_{0,i} = \frac{F_5(\lambda_i)}{F_6(\lambda_i) - \lambda_i^4 \gamma_i} y_{1,i} - \frac{F_3(\lambda_i)}{F_6(\lambda_i) - \lambda_i^4 \gamma_i} l_i \theta_{1,i} \quad (4-133)$$

$$\gamma_i = \frac{m}{2\mu_i l_i} \quad (4-134)$$

Ved indsætning af (4-133) i de 2 sidste ligninger i (4-132) findes

$$\begin{bmatrix} l_i Q_{1,i} \\ M_{1,i} \end{bmatrix} = \frac{EI_i}{l_i^2} \begin{bmatrix} F_{10}(\lambda_i, \gamma_i) & -F_{12}(\lambda_i, \gamma_i) \\ -F_{12}(\lambda_i, \gamma_i) & F_{11}(\lambda_i, \gamma_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,i} \\ l_i \theta_{1,i} \end{bmatrix} \quad (4-135)$$

$$F_{10}(\lambda_i, \gamma_i) = F_6(\lambda_i) - \frac{F_5^2(\lambda_i)}{F_6(\lambda_i) - \lambda_i^4 \gamma_i} = 0 + o(\lambda_i^3) \quad (4-135a)$$

$$F_{11}(\lambda_i, \gamma_i) = F_2(\lambda_i) - \frac{F_3^2(\lambda_i)}{F_6(\lambda_i) - \lambda_i^4 \gamma_i} = 1 + o(\lambda_i^3) \quad (4-135b)$$

$$F_{12}(\lambda_i, \gamma_i) = F_4(\lambda_i) - \frac{F_3(\lambda_i)F_5(\lambda_i)}{F_6(\lambda_i) - \lambda_i^4 \gamma_i} = 0 + o(\lambda_i^3) \quad (4-135c)$$

Tilsvarende findes den reducerede stivhedsmatrix for bjælkeelementet i figur 4-21c med bevægelig indspænding i højre endepunkt

$$\begin{bmatrix} l_i Q_{0,i} \\ M_{0,i} \end{bmatrix} = \frac{EI_i}{l_i^2} \begin{bmatrix} F_{10}(\lambda_i, \gamma_i) & F_{12}(\lambda_i, \gamma_i) \\ F_{12}(\lambda_i, \gamma_i) & F_{11}(\lambda_i, \gamma_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{0,i} \\ l_i \theta_{0,i} \end{bmatrix} \quad (4-136)$$

Dernæst antages mere generelt, at bjælkeelementet har en mekanisk randbetingelse, således at den l . komponent på venstresiden af (4-116) er lig nul. Den l . komponent i elementets frihedsgradsvektor \mathbf{X}_i kan herved udtrykkes som en linearkombination af elementets øvrige frihedsgrader ved en relation analog til (4-129), hvorefter en stivhedsmatrix for det aktuelle bjælkeelement kan opstilles ved indsætning heraf i (4-116), (4-117). Lad $\bar{k}_{jk}(\omega^2)$ og $k_{jk}(\omega^2)$ betegne elementet i den j . række og k . søjle af henholdsvis den aktuelle stivhedsmatrix og stivhedsmatricen (4-117) for et bjælkeelement uden mekaniske randbetingelser. $\bar{k}_{jk}(\omega^2)$ er da givet ved (sammenlign med (4-130))

$$\bar{k}_{jk}(\omega^2) = k_{jk}(\omega^2) - \frac{k_{jl}(\omega^2)k_{lk}(\omega^2)}{k_{ll}(\omega^2)} \quad (4-137)$$

Det fremgår, at elementerne i den l . række og den l . søjle af $\bar{k}_{jk}(\omega^2)$ er lig 0. Indsættes rækkeudviklingen (4-119) på højresiden af (4-137) kan følgende rækkeudvikling udledes for $\bar{k}_{jk}(\omega^2)$

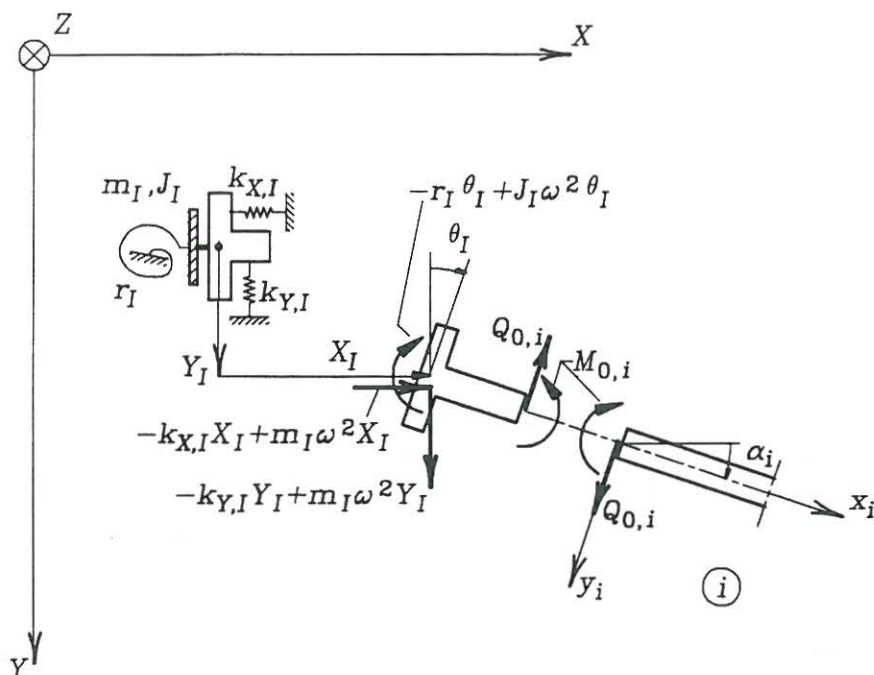
$$\bar{k}_{jk}(\omega^2) = \bar{k}_{jk}^{(0)} - \omega^2 \bar{m}_{jk}^{(0)} - \omega^4 \bar{m}_{jk}^{(1)} + o(\omega^5) \quad (4-138)$$

hvor

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_{jk}^{(0)} &= k_{jk}^{(0)} - \frac{k_{jl}^{(0)}k_{lk}^{(0)}}{k_{ll}^{(0)}} \\ \bar{m}_{jk}^{(0)} &= m_{jk}^{(0)} - \frac{k_{jl}^{(0)}m_{lk}^{(0)} + m_{jl}^{(0)}k_{lk}^{(0)}}{k_{ll}^{(0)}} + \frac{k_{jl}^{(0)}k_{lk}^{(0)}m_{ll}^{(0)}}{(k_{ll}^{(0)})^2} \\ \bar{m}_{jk}^{(1)} &= m_{jk}^{(1)} - \frac{k_{jl}^{(0)}m_{lk}^{(1)} + m_{jl}^{(1)}k_{lk}^{(0)} - m_{jl}^{(0)}m_{lk}^{(0)}}{k_{ll}^{(0)}} \\ &\quad + \frac{k_{jl}^{(0)}k_{lk}^{(0)}}{k_{ll}^{(0)}} \left(\frac{m_{ll}^{(1)}}{k_{ll}^{(0)}} + \left(\frac{m_{ll}^{(0)}}{k_{ll}^{(0)}} \right)^2 \right) - \frac{k_{jl}^{(0)}m_{lk}^{(0)} + m_{jl}^{(0)}k_{lk}^{(0)}}{k_{ll}^{(0)}} \frac{m_{ll}^{(0)}}{k_{ll}^{(0)}} \end{aligned} \right\} \quad (4-139)$$

$k_{jk}^{(0)}$, $m_{jk}^{(0)}$, $m_{jk}^{(1)}$ betegner elementet i den j . række og den k . søjle af matricerne $\mathbf{k}^{(0)}$, $\mathbf{m}^{(0)}$, $\mathbf{m}^{(1)}$.

Det viser sig, at $\bar{k}_{jk}^{(0)}$ og $\bar{m}_{jk}^{(0)}$ bestemt ved (4-139) henholdsvis angiver elementet i den j . række og den k . søjle af den elastiske stivhedsmatrix og af den konsistente massematrix for et kompatibelt flytningsfelt af typen (4-121), der tillige opfylder den mekaniske randbetingelse i den l . frihedsgrad.



Figur 4-22: Ligevægt af systemknuder.

Der indlægges et globalt (X, Y, Z) -koordinatsystem. (X, Y) -planen er sammenfaldende med konstruktionsplanen. Z -aksen og de lokale z_i -akser er ensrettede.

I figur 4-22 er systemknode I skåret fri. X_I, Y_I angiver amplituden af knudens flytninger efter X - og Y -aksernes retninger, mens θ_I er amplituden af knudens rotation efter Z -aksens retning.

Ved knude I er placeret en udbredt masse med massen m_I og masseinertimomentet J_I om en akse gennem knude I parallel med Z -aksen, translationsfjedere i X - og Y -aksernes retninger med fjederkonstanterne $k_{X,I}$ og $k_{Y,I}$, og en rotationsfjeder med fjederkonstanten r_I . Knuden skæres fri fra fjedrene, og fjederkræfterne påføres knuden som ydre kræfter. Massen giver anledning til inertikræfter med amplituderne $m_I \omega^2 X_I$ og $m_I \omega^2 Y_I$ i X - og Y -aksernes retninger, og d'Alembertmomentet $J_I \omega^2 \theta_I$ i Z -aksens retning. De resulterende fjeder- og inertikræfter er anført i figur 4-22.

Bjælke i er bøjningsstift forbundet med knude I . Bjælke i skæres fri fra knude I , og bjælkeknudebelastningerne $Q_{0,i}, M_{0,i}$ påføres knude I som ydre belastninger som vist i figur 4-22. α_i betegner vinklen fra den globale X -akse til den lokale x_i -akse regnet positivt med uret. For rammen i figur 4-17 er $\alpha_i = 0, \alpha_i = \pi$ eller $\alpha_i = \pm \frac{\pi}{2}$.

Den fritskårne knude I skal være i kraftligevægt i X - og Y -aksernes retninger og i momentligevægt. Herved haves

Kraftligevægt i X -aksens retning:

$$-k_{X,I} X_I + m_I \omega^2 X_I + \sum_i Q_{0,i} \sin \alpha_i = 0 \quad (4-140a)$$

Kraftligevægt i Y -aksens retning:

$$-k_{Y,I}Y_I + m_I\omega^2 Y_I - \sum_i Q_{0,i} \cos \alpha_i = 0 \quad (4-140b)$$

Momentligevægt i Z -aksens retning:

$$-r_I\theta_I + J_I\omega^2\theta_I - \sum_i M_{0,i} = 0 \quad (4-140c)$$

Summationerne i (4-140) udstrækkes over alle bjælkeelementer, der støder til knude I .

$Q_{0,i}$ og $M_{0,i}$ kan udtrykkes ved Kolouseks funktioner og bjælkens endepunktsdeformationer $y_{0,i}$, $\theta_{0,i}$, $y_{1,i}$, $\theta_{1,i}$ ved (4-116), (4-130), (4-131), (4-135), (4-136). Bjælkens endepunktsdeformationer er forbundet med rammeknudens deformationer ved kompatibilitetsbetingelserne. For knude I findes således, se figur 4-22

$$y_{0,i} = -X_I \sin \alpha_i + Y_I \cos \alpha_i \quad (4-141a)$$

$$\theta_{0,i} = \theta_I \quad (4-141b)$$

Den lokale frekvensparameter λ_i kan udtrykkes ved den cykliske egensvingningsfrekvens ω ved (4-108), (4-110). Når ligevægtsligningerne (4-140) opstilles for alle rammeknuder, fremkommer et system af homogene ligninger, der altid kan skrives på formen

$$\mathbf{K}(\omega^2)\mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (4-142)$$

\mathbf{Y} er N -dimensional vektor af rammens globale frihedsgrader. For systemet i figur 4-19b er $N = 3 \cdot 2 = 6$, mens $N = 3 \cdot 1 = 3$ for systemet i figur 4-19c.

$\mathbf{K}(\omega^2)$ er rammens *globale stivhedsmatrix* ved harmoniske bevægelser af rammen med den cykliske frekvens ω . $\mathbf{K}(\omega^2)$ kan formelt opstilles ved den sædvanlige fremgangsmåde i elementmetoden, dvs. ved en summation af lokale stivhedsmatricer af typen (4-116) transformeret til globale koordinater

$$\mathbf{K}(\omega^2) = \sum_{i=1}^M \mathbf{A}_i^T \mathbf{k}_i(\omega^2) \mathbf{A}_i \quad (4-143)$$

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{Y} \quad (4-144)$$

\mathbf{A}_i af dimension $4 \times N$ angiver transformationsmatricen fra globale frihedsgrader til lokale frihedsgrader. M angiver antallet af bjælkeelementer. Efter multiplikation foran med \mathbf{Y}^T

og bagved med \mathbf{Y} på begge sider udtrykker (4-143) ved (4-144), at systemets tøjningsenergi er lig summen af tøjningsenergien i alle bjælkeelementer.

Herudover skal til komponenten $k_{II}(\omega)$ i hoveddiagonalen adderes bidraget $k_I - \omega^2 m_I$, ifald der forekommer en koncentreret translations- eller rotationsfjeder med fjederstivheden k_I og en masse eller et masseinertimoment m_I i retning af den globale frihedsgrad I .

Den nødvendige betingelse for ikke-trivielle løsninger til (4-142) er, at determinanten til den globale dynamiske stivhedsmatrix er lig 0. Dette fører til frekvensbetingelsen

$$\det(\mathbf{K}(\omega^2)) = 0 \quad (4-145)$$

Løsninger til (4-145) bestemmer konstruktionens udæmpede cykliske egenfrekvenser $\omega_1, \omega_2, \dots$

For $\omega = \omega_j$ eksisterer løsninger $\mathbf{Y}^{(j)} \neq \mathbf{0}$ til (4-142). Ved (4-144) bestemmes den tilsvarende løsning $\mathbf{X}_i^{(j)}$ for de lokale frihedsgrader. Ved (4-114) bestemmes endelig koefficienterne $[A_i^{(j)}, B_i^{(j)}, C_i^{(j)}, D_i^{(j)}]$ i udviklingen (4-107) for den j . eigensvingningsform $\Phi_i^{(j)}(x_i)$.

Ved indsætning af (4-119) i (4-143) haves følgende rækkeudvikling for den globale dynamiske stivhedsmatrix

$$\mathbf{K}(\omega^2) = \mathbf{K}^{(0)} - \omega^2 \mathbf{M}^{(0)} - \omega^4 \mathbf{M}^{(1)} + o(\omega^5) \quad (4-146)$$

$$\mathbf{K}^{(0)} = \sum_{i=1}^M \mathbf{A}_i^T \mathbf{k}_i^{(0)} \mathbf{A}_i \quad (4-147a)$$

$$\mathbf{M}^{(0)} = \sum_{i=1}^M \mathbf{A}_i^T \mathbf{m}_i^{(0)} \mathbf{A}_i \quad (4-147b)$$

$$\mathbf{M}^{(1)} = \sum_{i=1}^M \mathbf{A}_i^T \mathbf{m}_i^{(1)} \mathbf{A}_i \quad (4-147c)$$

Den globale statiske stivhedsmatrix $\mathbf{K}^{(0)}$ og den globale konsistente massematrix $\mathbf{M}^{(0)}$ modificeres dernæst i hoveddiagonalen for henholdsvis eventuelle koncentrerede fjedre eller masser.

Afhængig af, om rækken (4-146) afrundes efter 2 eller 3 led, fører (4-142) til følgende diskrete egenværdiproblemer

$$(\mathbf{K}^{(0)} - \omega^2 \mathbf{M}^{(0)}) \mathbf{Y}_0 = \mathbf{0} \quad (4-148)$$

$$(\mathbf{K}^{(0)} - \omega^2 \mathbf{M}^{(0)} - \omega^4 \mathbf{M}^{(1)}) \mathbf{Y}_1 = \mathbf{0} \quad (4-149)$$

Løsningerne $(\omega_j^2, \mathbf{Y}^{(j)})$, $(\omega_{2,j}, \mathbf{Y}_0^{(j)})$, $(\omega_j^2, \mathbf{Y}_1^{(j)})$ til henholdsvis (4-142), (4-148) og (4-149) er i almindelighed forskellige.

(4-148) er et diskret lineært egenverdiproblem af samme type som (3-43). Det kan vises ved Rayleighs princip for kontinuerte systemer, at ω_1 for det diskrete system udgør en øvregrænse til ω_1 for det kontinuerte system.

(4-149) er et kvadratisk egenverdiproblem af samme type som (3-210). De 2 egenverdiproblemer svarer formelt til hverandre, hvis man identificerer $-\omega^2$ med λ , $\mathbf{K}^{(0)}$ med \mathbf{K} , $\mathbf{M}^{(0)}$ med \mathbf{C} og $\mathbf{M}^{(1)}$ med $-\mathbf{M}$. Svarende til at det kvadratiske egenverdiproblem (3-210) er ækvivalent med det lineære egenverdiproblem (3-197), (3-201) af dobbelt dimension, kan det kvadratiske egenverdiproblem (4-149) af dimension N omformuleres til følgende lineære egenverdiproblem af dimension $2N$

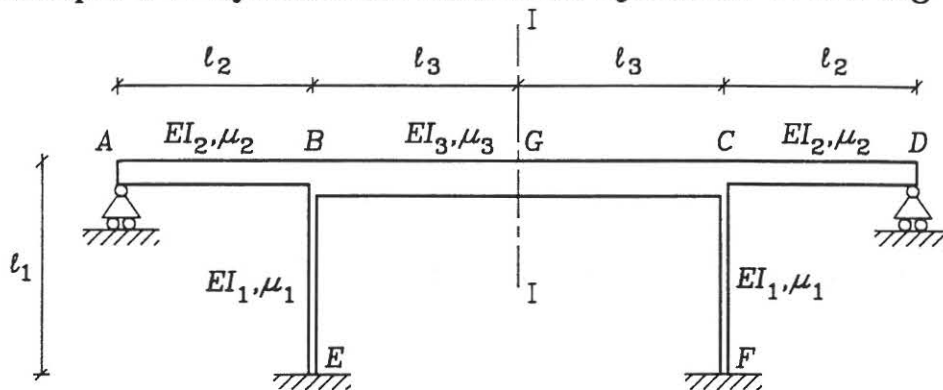
$$(\mathbf{B} - \omega^2 \mathbf{A}) \Psi = 0 \quad (4-150)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ -\omega^2 \mathbf{Y}_1 \end{bmatrix} \quad (4-151)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(0)} & -\mathbf{M}^{(1)} \\ -\mathbf{M}^{(1)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(0)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (4-151)$$

Egenverdiproblemet (4-150) har altid N positivt reelle egenverdier ω_j^2 , der er identiske med de søgte egenverdier til (4-149). Hertil kommer N falske egenverdier, der kan være komplekse eller negativt reelle.

Eksempel 4-7: Symmetrisk kontinuert bjælkebro over 3 fag



Figur 4-23: Kontinuert bjælkebro over 3 fag.

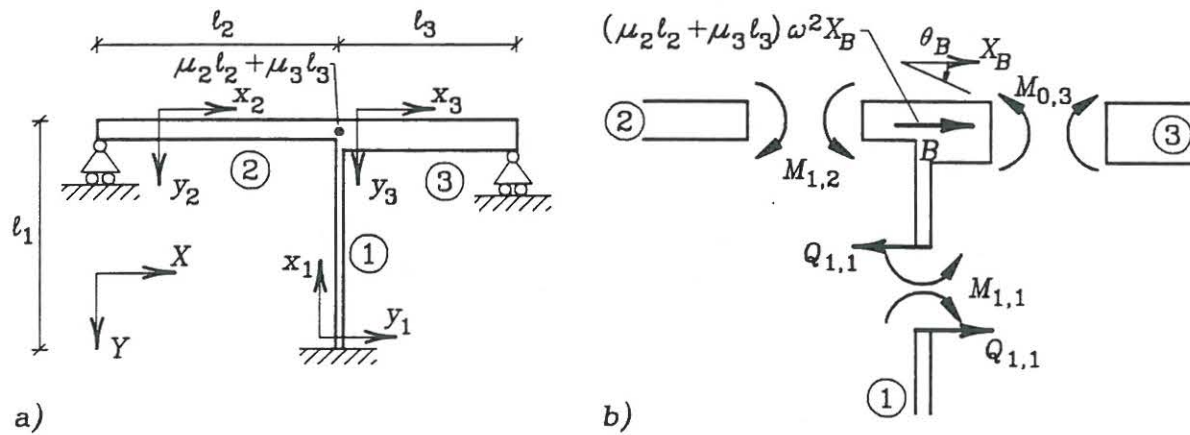
Den plane bjælkebro i figur 4-23 er symmetrisk om planen $I-I$. Konstruktionens udæmpede egenfrekvenser ønskes bestemt for følgende parameterforhold

$$\left. \begin{aligned} \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_3}{l_1} = 1 \\ \frac{EI_2}{EI_1} = 4, \quad \frac{EI_3}{EI_1} = 8 \\ \frac{\mu_2}{\mu_1} = 2, \quad \frac{\mu_3}{\mu_1} = 4 \end{aligned} \right\} \quad (4-153)$$

Den globale frekvensparameter λ vælges lig λ_1 . Ved (4-108) findes

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt[4]{\frac{\mu_1 \omega^2 l_1^4}{EI_1}} = \lambda \\ \lambda_2 &= \sqrt[4]{\frac{\mu_2 \omega^2 l_2^4}{EI_2}} = \kappa_2 \lambda, \quad \kappa_2 = \sqrt[4]{\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{EI_1}{EI_2} \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^4} \\ \lambda_3 &= \sqrt[4]{\frac{\mu_3 \omega^2 l_3^4}{EI_3}} = \kappa_3 \lambda, \quad \kappa_3 = \sqrt[4]{\frac{\mu_3}{\mu_1} \frac{EI_1}{EI_3} \left(\frac{l_3}{l_1}\right)^4} \end{aligned} \right\} \quad (4-154)$$

Ved egenfrekvensbestemmelsen udnyttes symmetrien som skitseret i figur 4-24 og figur 4-25.



Figur 4-24: a) Ækvivalent system ved antimetriske egensvingsformer. b) Ligevægtsbetingelse ved fritskåret knude B.

Antimetriske egensvingninger analyseres ved det i figur 4-24a viste system. I figur 4-24b er knude B skåret fri. Forskydningskræfterne $Q_{1,2}$ og $Q_{0,3}$ overføres som normalkraft i bjælke 1. De øvrige ligevægtsligninger giver

$$\left. \begin{aligned} Q_{1,1} - (\mu_2 l_2 + \mu_3 l_3) \omega^2 X_B &= 0 \\ M_{1,1} + M_{1,2} + M_{0,3} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-155)$$

X_B angiver den vandrette flytning af knude B i den globale X-retning. I de følgende regninger indføres desuden rotationen θ_B i den globale Z-retning af knude B, se figur 4-24b. Kompatibilitetsbetingelserne

og de geometriske randbetingelser giver

$$\left. \begin{aligned} l_1 \theta_{0,1} = y_{0,1} = y_{1,2} = y_{0,3} = 0 \\ y_{1,1} = X_B \\ \theta_{1,1} = \theta_{1,2} = \theta_{0,3} = \theta_B \end{aligned} \right\} \quad (4-156)$$

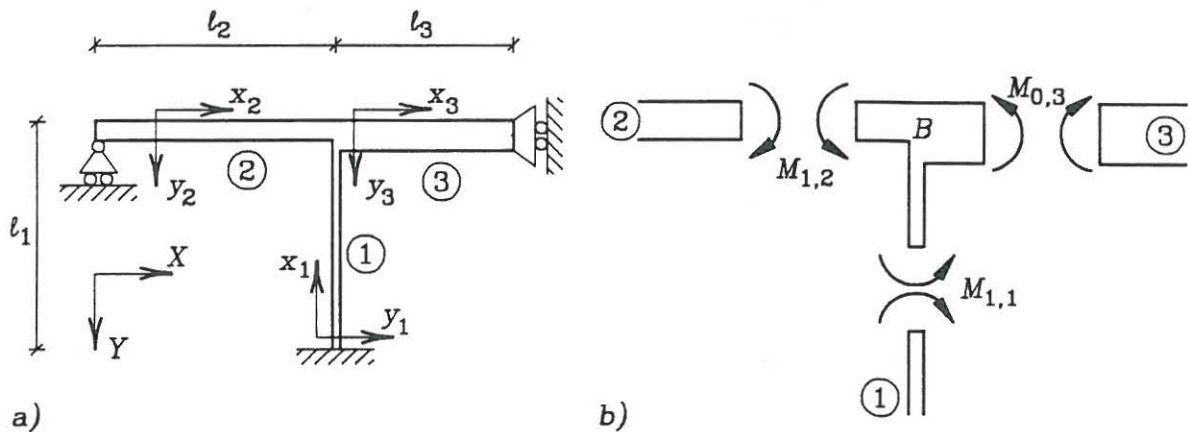
Ved (4-116), (4-130), (4-131) antager (4-155) herved formen

$$\left. \begin{aligned} \frac{EI_1}{l_1^3} \left(F_6(\lambda_1) X_B - F_4(\lambda_1) l_1 \theta_B \right) - (\mu_2 l_2 + \mu_3 l_3) \omega^2 X_B = 0 \\ \frac{EI_1}{l_1^2} \left(-F_4(\lambda_1) X_B + F_2(\lambda_1) l_1 \theta_B \right) + \frac{EI_2}{l_2} F_8(\lambda_2) \theta_B + \frac{EI_3}{l_3} F_8(\lambda_3) \theta_B = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} F_6(\lambda) - \frac{\mu_2 l_2}{\mu_1 l_1} \lambda^4 - \frac{\mu_3 l_3}{\mu_1 l_1} \lambda^4 & -F_4(\lambda) \\ -F_4(\lambda) & F_2(\lambda) + \frac{EI_2}{EI_1} \frac{l_1}{l_2} F_8(\kappa_2 \lambda) + \frac{EI_3}{EI_1} \frac{l_1}{l_3} F_8(\kappa_3 \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ l_1 \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-157)$$

Frekvensbetingelsen ved antimetriske egensvingninger bliver herved

$$\left(F_6(\lambda) - \frac{\mu_2 l_2}{\mu_1 l_1} \lambda^4 - \frac{\mu_3 l_3}{\mu_1 l_1} \lambda^4 \right) \left(F_2(\lambda) + \frac{EI_2}{EI_1} \frac{l_1}{l_2} F_8(\kappa_2 \lambda) + \frac{EI_3}{EI_1} \frac{l_1}{l_3} F_8(\kappa_3 \lambda) \right) - F_4^2(\lambda) = 0 \quad (4-158)$$



Figur 4-25: a) Ækvivalent system ved symmetriske egensvingsformer. b) Ligevægtsbetingelse ved fritskåret knude B.

Symmetriske egensvingninger analyseres ved det i figur 4-25a viste ækvivalente system. I figur 4-25b er knude B skåret fri. Forskydningskræfterne $Q_{1,2}$ og $Q_{0,3}$ overføres som normalkraft i bjælke 1. Forskydningskraften $Q_{1,1}$ overføres som normalkraft i bjælke 3. Momentligningen er eneste ikke-trivielle ligevægtsligning. Denne bliver

$$M_{1,1} + M_{1,2} + M_{0,3} = 0 \quad (4-159)$$

Ved anvendelse af (4-116) med $l_1\theta_{0,1} = y_{0,1} = y_{1,1} = 0$, (4-130) med $y_{1,2} = 0$ og (4-136) med $y_{0,3} = 0, \gamma_3 = 0$ findes herved frekvensbetingelsen for symmetriske egensvingninger

$$\frac{EI_1}{l_1} F_2(\lambda) \theta_B + \frac{EI_2}{l_2} F_8(\kappa_2 \lambda) \theta_B + \frac{EI_3}{l_3} F_{11}(\kappa_3 \lambda, 0) \theta_B = 0 \Rightarrow$$

$$F_2(\lambda) + \frac{EI_2}{EI_1} \frac{l_1}{l_2} F_8(\kappa_2 \lambda) + \frac{EI_3}{EI_1} \frac{l_1}{l_3} F_{11}(\kappa_3 \lambda, 0) = 0 \quad (4-160)$$

Ved anvendelse af (4-153) i (4-158) findes de 4 laveste egenværdier af frekvensparameteren ved antisymmetriske egensvingninger

$$\left. \begin{array}{ll} \lambda_1 = 1.1494 & , \quad \lambda_6 = 7.4095 \\ \lambda_3 = 3.7533 & , \quad \lambda_8 = 7.9465 \end{array} \right\} \quad (4-161)$$

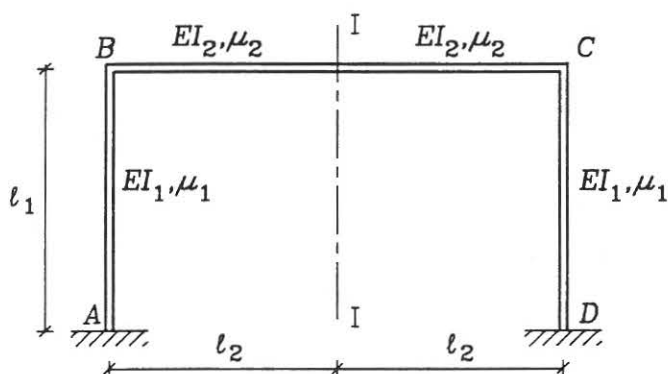
De 4 laveste løsninger til (4-160), svarende til symmetriske egensvingninger, bliver

$$\left. \begin{array}{ll} \lambda_2 = 2.2493 & , \quad \lambda_5 = 5.9753 \\ \lambda_4 = 4.3135 & , \quad \lambda_7 = 7.7510 \end{array} \right\} \quad (4-162)$$

Ved (4-110), (4-161), (4-162) findes de 3 laveste egenfrekvenser til

$$\left. \begin{array}{ll} f_1 = \frac{1.1494^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI_1}{\mu_1 l_1^4}} & (\text{antisymmetrisk}) \\ f_2 = \frac{2.2493^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI_1}{\mu_1 l_1^4}} & (\text{symmetrisk}) \\ f_3 = \frac{3.7533^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI_1}{\mu_1 l_1^4}} & (\text{antisymmetrisk}) \end{array} \right\} \quad (4-163)$$

Eksempel 4-8: Symmetrisk 1-etages rammekonstruktion



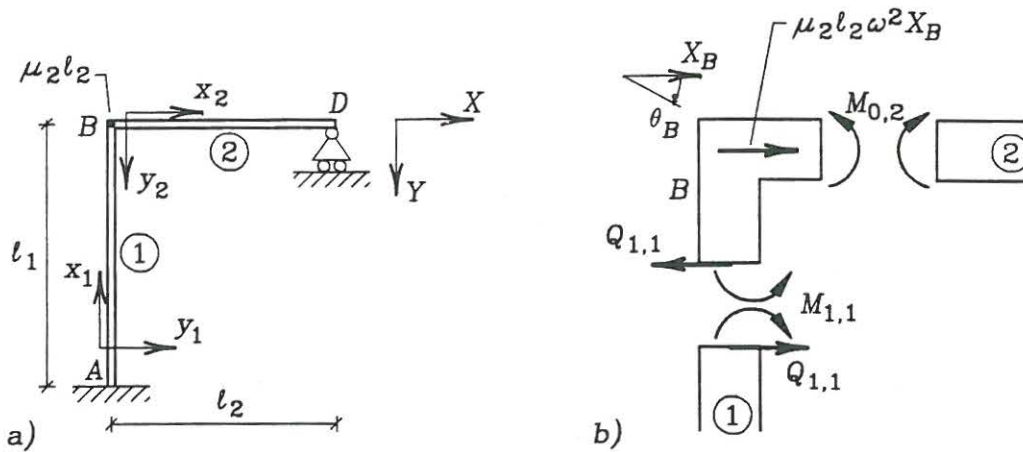
Figur 4-26: Plan 1-etages rammekonstruktion.

Rammekonstruktionen i figur 4-26 er symmetrisk om planen $I - I$. Konstruktionens udæmpede egenfrekvenser ønskes bestemt for følgende parameterforhold

$$\frac{l_2}{l_1} = 1, \quad \frac{EI_2}{EI_1} = 2, \quad \frac{\mu_2}{\mu_1} = 5 \quad (4 - 164)$$

Den globale frekvensparameter λ vælges lig λ_1 . Ved (4-108) findes

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt[4]{\frac{\mu_1 \omega^2 l_1^4}{EI_1}} = \lambda \\ \lambda_2 &= \kappa_2 \lambda, \quad \kappa_2 = \sqrt[4]{\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{EI_1}{EI_2} \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^4} \end{aligned} \right\} \quad (4 - 165)$$



Figur 4-27: a) Ækvivalent system ved antimetriske egensvingninger. b) Ligevægtsbetingelse for fritskåret knude B.

Antimetriske egensvingninger analyseres ved det i figur 4-27a viste system. I figur 4-27b er knude B skåret fri. Forskydningskraften $Q_{0,2}$ fra bjælke 2 overføres som normalkraft i bjælke 1. De øvrige ligevægtsligninger giver

$$\begin{aligned} Q_{1,1} - \mu_2 l_2 \omega^2 X_B &= 0 \\ M_{1,1} + M_{0,2} &= 0 \end{aligned} \quad (4 - 166)$$

X_B angiver den vandrette flytning af knude B i den globale X-retning. I de følgende regninger indføres desuden rotationen θ_B i den globale Z-retning af knude B, se figur 4-27b.

Kompatibilitetsbetingelserne og de geometriske randbetingelser giver

$$\left. \begin{aligned} y_{1,1} &= X_B \\ \theta_{1,1} &= \theta_{0,2} = \theta_B \\ l_1 \theta_{0,1} &= y_{0,1} = y_{0,2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4 - 167)$$

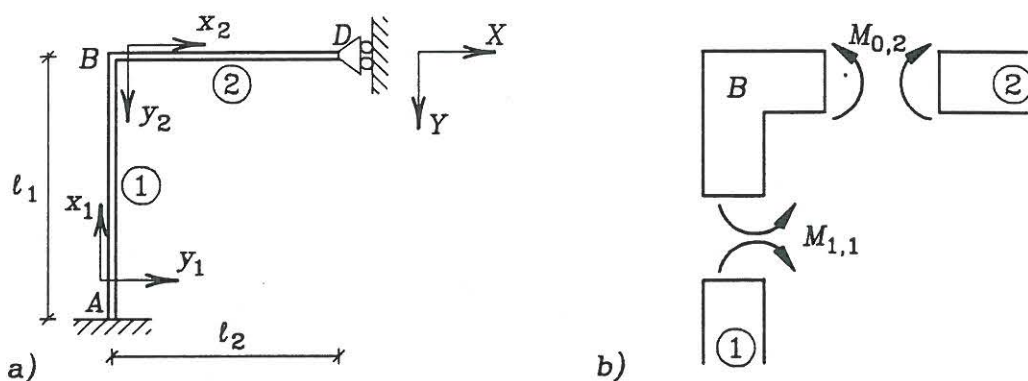
Ved (4-110), (4-116), (4-131) antager (4-166) herved formen

$$\left. \begin{aligned} \frac{EI_1}{l_1^3} (F_6(\lambda)X_B - F_4(\lambda)l_1\theta_B) - \mu_2 l_2 \omega^2 X_B &= 0 \\ \frac{EI_1}{l_1^2} (-F_4(\lambda)X_B + F_2(\lambda)l_1\theta_B) + \frac{EI_2}{l_2 l_1} F_8(\kappa_2 \lambda) l_1 \theta_B &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} F_6(\lambda) - \frac{\mu_2 l_2}{\mu_1 l_1} \lambda^4 & -F_4(\lambda) \\ -F_4(\lambda) & F_2(\lambda) + \frac{EI_2}{EI_1} \frac{l_1}{l_2} F_8(\kappa_2 \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ l_1 \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-168)$$

Frekvensbetingelsen for antimetriske egensvingninger bliver herved

$$\left(F_6(\lambda) - \frac{\mu_2 l_2}{\mu_1 l_1} \lambda^4 \right) \left(F_2(\lambda) + \frac{EI_2}{EI_1} \frac{l_1}{l_2} F_8(\kappa_2 \lambda) \right) - F_4^2(\lambda) = 0 \quad (4-169)$$



Figur 4-28: a) Ækvivalent system ved symmetriske egensvingninger. b) Ligevægtsbetingelse for fritskåret knude B.

Symmetriske egensvingninger kan analyseres ved det i figur 4-28a viste ækvivalente system. I figur 4-28b er knude B skåret fri. Forskydningskræfterne $Q_{1,1}$, $Q_{0,2}$ overføres som normalkræfter i henholdsvis bjælke 2 og bjælke 1. Den sidste ligevægtsbetingelse bliver

$$M_{1,1} + M_{0,2} = 0 \quad (4-170)$$

Ved anvendelse af (4-116) med $l_1 \theta_{0,1} = y_{0,1} = y_{1,1} = 0$ og (4-136) med $y_{0,2} = 0$, $\gamma_i = 0$ findes herved frekvensbetingelsen for symmetriske egensvingninger

$$\frac{EI_1}{l_1} F_2(\lambda) \theta_B + \frac{EI_2}{l_2} F_{11}(\kappa_2 \lambda, 0) \theta_B = 0 \Rightarrow$$

$$F_2(\lambda) + \frac{EI_2}{EI_1} \frac{l_1}{l_2} F_{11}(\kappa_2 \lambda, 0) = 0 \quad (4-171)$$

Ved anvendelse af (4-164) i (4-169) findes de 6 laveste egenverdier af frekvensparameteren ved antisymmetriske egensvingninger

$$\left. \begin{array}{ll} \lambda_1 = 1.1195 & , \quad \lambda_7 = 5.2680 \\ \lambda_3 = 2.6614 & , \quad \lambda_9 = 7.3560 \\ \lambda_5 = 4.4651 & , \quad \lambda_{11} = 7.9754 \end{array} \right\} \quad (4-172)$$

De 6 laveste løsninger til (4-171) svarende til symmetriske egensvingninger bliver

$$\left. \begin{array}{ll} \lambda_2 = 1.5145 & , \quad \lambda_8 = 6.3679 \\ \lambda_4 = 3.7835 & , \quad \lambda_{10} = 7.6614 \\ \lambda_6 = 4.6373 & , \quad \lambda_{12} = 8.9278 \end{array} \right\} \quad (4-173)$$

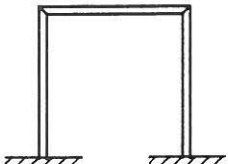
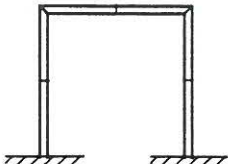
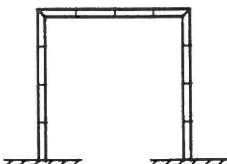
Ved (4-110), (4-172), (4-173) findes de 3 laveste udæmpede egenfrekvenser til

$$\left. \begin{array}{ll} f_1 = \frac{1.1195^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI_1}{\mu_1 l_1^4}} & \text{(antisymmetrisk)} \\ f_2 = \frac{1.5145^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI_1}{\mu_1 l_1^4}} & \text{(symmetrisk)} \\ f_3 = \frac{2.6614^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI_1}{\mu_1 l_1^4}} & \text{(antisymmetrisk)} \end{array} \right\} \quad (4-173)$$

Nedenfor i tabel 4-1 er de analytisk bestemte egenverdier af frekvensparameteren λ sammenlignet med værdierne opnået ved løsning af det lineære egenverdiproblem (4-148) og det kvadratiske egenverdiproblem (4-149), når rammen opdeles i henholdsvis 3, 6 og 12 delbjælker af samme længde. Under hensyntagen til de geometriske bindinger som følge af ustrækkelige bjælkeelementer får rammen herved henholdsvis $N = 3$, $N = 9$ og $N = 21$ globale frihedsgrader.

Ved opdeling i 3 bjælkeelementer bestemmer det diskrete lineære egenverdiproblem (4-148) kun den 1. antisymmetriske egenverdi tilstrækkelig nøjagtigt, mens det kvadratiske egenverdiproblem (4-149) tillige er i stand til at bestemme den 1. symmetriske egenverdi og den 2. antisymmetriske egenverdi med en fejl på henholdsvis 3.7% og 5.5%.

Af tabellen fremgår, at det kvadratiske egenverdiproblem (4-149) med en given elementinddeling generelt bestemmer egenverdier med samme nøjagtighed som det lineære egenverdiproblem (4-148) med dobbelt så mange elementer. Endvidere bemærkes, at både det lineære og det kvadratiske egenverdiproblem i alle betragtede tilfælde bestemmer øvreverdier til den tilsvarende analytisk bestemte egenverdi.

Egen- sving- nings- form	Symmetri- egenskab	Analytisk løsning	Løsninger baseret på diskret system					
			 3 elementer		 6 elementer		 12 elementer	
			(4-148)	(4-149)	(4-148)	(4-149)	(4-148)	(4-149)
1	Antimetrisk	1.1195	1.1196	1.1195	1.1195	1.1195	1.1195	1.1195
2	Symmetrisk	1.5145	1.7259	1.5701	1.5206	1.5147	1.5149	1.5145
3	Antimetrisk	2.6614	3.1259	2.8075	2.8431	2.6951	2.6679	2.6615
4	Symmetrisk	3.7835			4.0683	3.9240	3.8127	3.7852
5	Antimetrisk	4.4651			4.5904	4.5098	4.4872	4.4677
6	Symmetrisk	4.6373			5.2355	4.9591	4.6480	4.6382
7	Antimetrisk	5.2680			6.0730	5.5472	5.5601	5.3195
8	Symmetrisk	6.3679			9.1171	8.2183	6.7727	6.4936

Tabel 4-1: Egenverdier λ_i for plan ramme. Analytisk løsning og løsninger baseret på diskret system.

5. APPENDICES

5.1 Appendix A: Fourierrækker og Fourierintegraler

Lad $x(t)$ være en periodisk funktion med perioden T , der er stykkevis differentiabel i periodeintervallet $[0, T]$. I så fald gælder for *Fourierrækken*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \omega_m t + b_m \sin \omega_m t = \frac{x(t^+) + x(t^-)}{2} \quad (\text{A} - 1)$$

$$\omega_m = m \frac{2\pi}{T}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (\text{A} - 2)$$

$$\left. \begin{aligned} a_m &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \omega_m t dt, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ b_m &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin \omega_m t dt, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} - 3)$$

(A-1) udtrykker, at Fourierrækken konvergerer i kontinuitetspunkter af $x(t)$, mens rækken konvergerer mod middelværdien mellem grænseværdien $x(t^+)$ fra højre side og grænseværdien $x(t^-)$ fra venstre side i diskontinuitetspunkter.

Ved anvendelse af *Eulers formler* $\cos \omega_m t = \frac{1}{2}(e^{i\omega_m t} + e^{-i\omega_m t})$ og $\sin \omega_m t = -\frac{i}{2}(e^{i\omega_m t} - e^{-i\omega_m t})$ kan (A-1) skrives

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_m - ib_m)e^{i\omega_m t} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_m + ib_m)e^{-i\omega_m t} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{i\omega_m t} \end{aligned} \quad (\text{A} - 4)$$

hvor

$$A_m = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_m - ib_m) & , m > 0 \\ \frac{1}{2}a_0 & , m = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-m} + ib_{-m}) & , m < 0 \end{cases} \quad (\text{A} - 5)$$

Der er her benyttet, at $\omega_{-m} = -\omega_m$, jvf. (A-2).

Det fremgår af (A-5), at $A_{-m} = A_m^*$. A_m , $m \geq 0$, kan beregnes direkte ved anvendelse af (A-3) og (A-5)

$$A_m = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \omega_m t dt - i \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin \omega_m t dt \right)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\omega_m t} dt \quad (\text{A} - 6)$$

(A-1) kan skrives

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos(\omega_m t - \Psi_m) \quad (\text{A} - 7)$$

$$\left. \begin{aligned} c_m \cos \Psi_m &= a_m \\ c_m \sin \Psi_m &= b_m \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$c_m = (a_m^2 + b_m^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A} - 8)$$

$$\tan \Psi_m = \frac{b_m}{a_m} \quad (\text{A} - 9)$$

(A-7) viser, hvorledes en vilkårlig periodisk bevægelse kan opbygges som en superponering af harmoniske bevægelser. $\frac{1}{2}a_0$ er i henhold til (A-3) lig *det tidslige gennemsnit*

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (\text{A} - 10)$$

(A-1) ganges med $x(t)$, og der integreres over intervallet $[0, T]$. Herved findes ved (A-1) og (A-3)

$$\begin{aligned} \int_0^T x^2(t) dt &= \int_0^T \left(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t \right) x(t) dt \Rightarrow \\ \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt &= \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) \end{aligned} \quad (\text{A} - 11)$$

(A-11) betegnes *Parsevals sætning*. Højresiden af (A-11) konvergerer mod venstresiden under svagere betingelser, end der kræves for (A-1). Konvergens af (A-11) er således sikret, når blot $x(t)$ er stykkevis kontinuert.

Det tidslige gennemsnit på venstresiden af (A-11) betegnes *middelkvadrativærdien*. $\frac{1}{4}a_0^2$ og $\frac{1}{2}(a_m^2 + b_m^2)$ ses ved (A-8), (A-11) at være middelkvadrativærdien af henholdsvis det tidslige gennemsnit $\bar{x} = \frac{a_0}{2}$ og af den harmoniske komponent $c_m \cos(\omega_m t - \Psi_m)$. Parsevals sætning siger da, at middelkvadrativærdien af en periodisk bevægelse er lig summen

af middeltkvadratværdierne af den tidslige middelværdi og af samtlige indgående harmoniske komponenter.

Lad $x(t)$ være stykkevis integrabel i et hvert endeligt delinterval af intervallet $-\infty < t < \infty$. Endvidere antages $x(t)$ at være absolut integrabel i $]-\infty, \infty[$, hvormed menes

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k |x(t)| dt < \infty \quad (\text{A} - 12)$$

I så fald gælder *Fouriers integralsætning*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{x(t^+) + x(t^-)}{2} \quad (\text{A} - 13)$$

hvor

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} x(t) dt \quad (\text{A} - 14)$$

Integralet i (A-13) skal opfattes som grænseværdien af $\int_{-\omega_0}^{\omega_0}$ for $\omega_0 \rightarrow \infty$.

$X(\omega)$ betegnes den *Fouriertransformerede* af $x(t)$. Hvis $x(t)$ er en reel funktion bliver $X(\omega)$ i almindelighed kompleks.

Antag

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \left| \frac{d^r x}{dt^r} \right| = 0, \quad r = 0, 1, \dots, n-1 \quad (\text{A} - 15)$$

Ved gentagen anvendelse af delvis integration findes herved for den Fouriertransformerede $X^{(n)}(\omega)$ af $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$

$$\begin{aligned} X^{(n)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{d^n x(t)}{dt^n} dt \\ &= (i\omega)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} x(t) dt = (i\omega)^n X(\omega), \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (\text{A} - 16)$$

Antag, at $x(t)$ er defineret ved integralet

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) h(\tau) d\tau \quad (\text{A} - 17)$$

Den Fouriertransformerede af $x(t)$ er da givet ved

$$X(\omega) = H(\omega) F(\omega) \quad (\text{A} - 18)$$

hvor

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} h(t) dt \quad (\text{A} - 19)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad (\text{A} - 20)$$

Bevis:

Af (A-14) og (A-17) følger

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) f(\tau) d\tau \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \tau} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} h(t-\tau) dt \right) d\tau \end{aligned} \quad (\text{A} - 21)$$

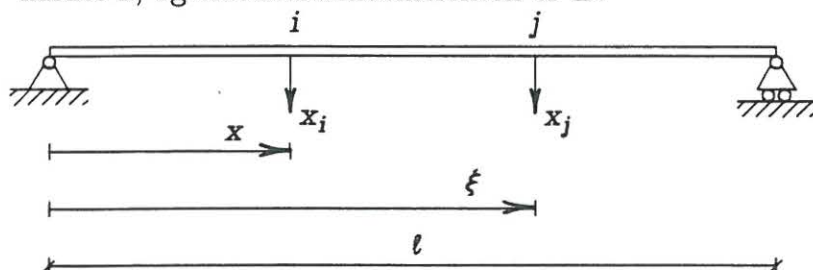
I det sidste udsagn er integrationsrækkefølgen ombyttet. I det inderste integral er τ konstant. Ved (A-19) og (A-20) findes herved

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \tau} f(\tau) H(\omega) d\tau = H(\omega) F(\omega)$$

Højresiden af (A-17) betegnes et *foldningsintegral*. Den inverse Fouriertransform af produktet af 2 Fouriertransformerede er således lig foldningsintegralet af de oprindelige funktioner.

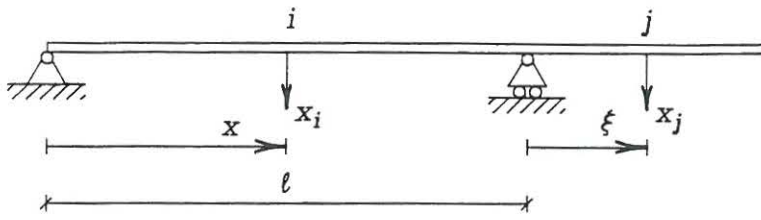
5.2 Appendix B: Influenstal for statisk bestemte retliniede Bernoulli-Euler-bjælker med konstant tværsnit

Nedenfor er vist 5 eksempler på influenstal for retliniede bjælker med konstant tværsnit påvirket i symmetriplanen.¹ Inertimomentet om akse vinkelret på symmetriplanen kaldes I , og elasticitetskoefficienten er E .

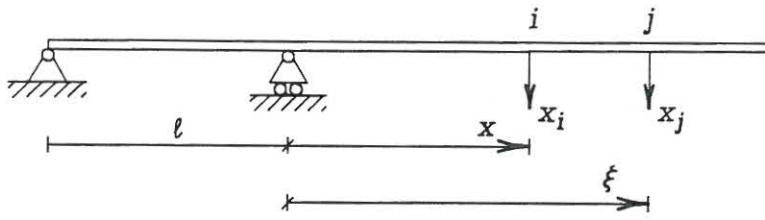


$$\delta_{ij} = \frac{x(l-\xi)(2\xi l - x^2 - \xi^2)}{6lEI}, \quad x \leq \xi \quad (\text{B} - 1)$$

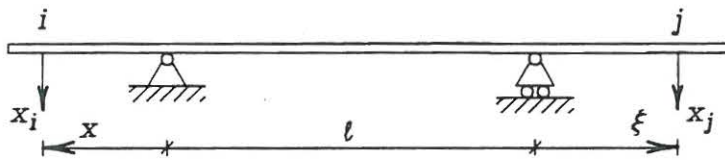
¹Reproduceret fra C. Dyrbye: Bygningsskildning I, Polyteknisk Forlag, Lyngby 1973.



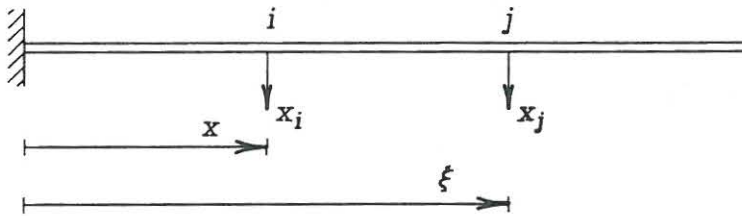
$$\delta_{ij} = -\frac{x\xi(l^2 - x^2)}{6lEI} \quad (\text{B} - 2)$$



$$\delta_{ij} = \frac{x(2l\xi + 3x\xi - x^2)}{6EI}, \quad x \leq \xi \quad (\text{B} - 3)$$



$$\delta_{ij} = \frac{x\xi l}{6EI} \quad (\text{B} - 4)$$



$$\delta_{ij} = \frac{x^2(3\xi - x)}{6EI}, \quad x \leq \xi \quad (\text{B} - 5)$$

6. EMNELISTE

Nedenfor er anført en liste over de vigtigste emner og definitioner. Der er kun refereret til siden i teksten, hvor disse første gang indføres. Endvidere er begreber, til hvilke der henvises i indholdsfortegnelsen, ikke anført.

acceleration	3
amplitudemodulation	56
beating	56
begyndelsesbetingelser	3
bevægelse, bevægelsesgensvar	1
bjælke med overkørende kraft	122
Caugheydæmpning	88
Coulombs dæmpningsmodel	11
cyklisk egenfrekvens	5, 51
cyklisk svingningsfrekvens	1, 4
D'Alemberts princip	36
deformationsmatrix	41
Diracs deltafunktion	26
diskret system	1
dissipativt system	11, 45
Duhamels integral	30
dynamisk forstærkningsfaktor	19, 124
dynamisk påvirkede modalkoordinater	85
dæmpede modalkoordinater	78
dæmpet cyklisk egenfrekvens	15, 70
dæmpet egensvingningsform	77
dæmpet egensvingningsperiode	15
dæmpet modalmasse	76
dæmpning	10
dæmpningsforhold	14
dæmpningsfrit system	13
dæmpningskonstant	11
dæmpningskraft	10
dæmpningsmatrix	45
egensvingningsbevægelse	51
egensvingningsfrekvens	5
egensvingningsperiode	5
enhedsimpuls	26

erstatningsfjeder	8
et frihedsgradssystem	1
Eulers formler	146
fase	1
foldningsintegral	149
formfunktioner	129
Fourierrække	24, 146
Fouriers integralsætning	148
Fouriertransformation	31, 148
frekvensbetingelse	49, 109, 137
frekvensforhold	19
frekvensresponsfunktion	18, 71
frekvensresponsmatrix	58
frihedsgrad	1
geometriske randbetingelser	99
global konsistent massematrix	137
global statisk stivhedsmatrix	137
global stivhedsmatrix	136
Gram-Schmidts ortogoniseringsmetode	67
Guyanreduktion	86
halvbåndsbredde	23
halvbåndspunkter	23
harmonisk bevægelse	1
harmonisk amplitudegensvar	20
hastighed	3
homogene randbetingelser	101
hysteresesløjfe	12
ikkelineær dæmpning	11
ikkelineært system	1
impuls	26
impulsive kræfter	26
impulsresponsfunktion	27
impulsresponsmatrix	60
inertikraft	36
influenstal	39
jordskælvpåvirkning	35
karakteristisk ligning	49
kinetisk energi	7
k. ordens perturbationsløsning	72
Kolouseks funktioner	128
konsistent massematrix	130

kontinuert system	1
kritisk dæmpet system	13
kritisk værdi af dæmpningskonstant	14
kvasistatisk bevægelse	20, 93
kvasistatisk påvirkede modalkoordinater	85
Landausymbol	23
lineært system	1
lineært viskos dæmpningsmodel	11, 45, 102
logaritmisk dekrement	15
massematrix	41
Maxwells sætning	41
mekanisk energi	7
mekaniske randbetingelser	99
Mercers sætning	71, 80
mesterfrihedsgrader	87
middelkvadratværdi	147
modalbelastning	67, 121
modal impulsresponsfunktion	70
modal dæmpningsforhold	69, 121
modal frekvensresponsfunktion	71
modalmatrix	54
multifrihedsgradssystem	1
multipl egenværdi	65
Newtons 2. lov	3
overkritisk dæmpet system	13
parallelsystem af fjedre	9
Parsevals sætning	147
periode af periodisk bevægelse	2
periodisk bevægelse	2
perturbationsanalyse	72
potentiel energi	7
proportional dæmpning	88
Rayleighs brøk	91
Rayleighdæmpning	88
Rayleighs princip	91
seriesystem af fjedre	8
simple egenværdier	65
slavefrihedsgrader	87
stationær bevægelse	21
statisk kondensation	87

statisk ligevægtstilstand	3
stivhedsmatrix	41
superpositionsprincip	1
svagt dæmpet system	17
svingningsfrekvens	2
tidsligt gennemsnit	146
transient bevægelse	21
transmissionskoefficient	33
udeformeret tilstand	5
udæmpede modalkoordinater	67, 119
udæmpet cyklisk egenfrekvens	51, 107
udæmpet egensvingningsbevægelse	51
udæmpet egensvingningsform	49, 108
udæmpet modalmasse	64, 114
underkritisk dæmpet system	13